

# **Einführung in die Physik**

Robert Adam

Stand: 21. Juni 2018

## **Vorwort**

Dieses Skript wurde nach bestem Wissen und Gewissen von mir geschrieben, wobei ich versucht habe, alles korrekt darzustellen. Nichtsdestotrotz kann ich nicht für die Fehlerfreiheit des Skript-Inhalts garantieren.

Sollten dir Fehler egal welcher Natur (inhaltlich, Rechtschreibung, etc.) auffallen, dann sende bitte eine E-Mail an [robby@alexanderadam.de](mailto:robby@alexanderadam.de) damit ich den Fehler verbessern kann.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Mechanik</b>	<b>1</b>
1.1	Kinematik . . . . .	1
1.1.1	Gleichförmige Bewegung . . . . .	1
1.1.2	Gleichmäßig beschleunigte Bewegung . . . . .	1
1.1.3	Horizontaler Wurf . . . . .	2
1.1.4	Schiefer Wurf . . . . .	3
1.1.5	Drehbewegung . . . . .	4
1.2	Dynamik - Translationsbewegungen . . . . .	6
1.2.1	Newton'sche Axiome . . . . .	7
1.2.2	Kräfte - Anwendung der Axiome . . . . .	8
1.2.3	Bewegungsgleichungen . . . . .	16
1.2.4	Impuls und Kraftstoß . . . . .	16
1.2.5	Arbeit, Energie und Leistung . . . . .	19
1.2.6	Teilchensysteme und Erhaltungssätze . . . . .	23
1.3	Dynamik - Rotationsbewegungen . . . . .	27
1.3.1	Winkelbeschleunigung . . . . .	27
1.3.2	Zentripetalkraft . . . . .	28
1.3.3	Drehmoment . . . . .	29
1.3.4	Drehimpuls . . . . .	29
1.3.5	Trägheitsmoment . . . . .	31
1.3.6	Arbeit, Energie und Leistung . . . . .	33
1.3.7	Abbremsen einer Kugel auf schiefer Ebene . . . . .	34
1.3.8	Der Trägheitstensor . . . . .	37
1.3.9	Rotation um die Hauptträgheitsachsen . . . . .	37
1.3.10	Kreisel, Präzession und Nutation . . . . .	38
1.3.11	Corioliskraft . . . . .	41
1.4	Potential und Kraftfeld . . . . .	43
1.5	Mechanik deformierbarer Körper . . . . .	45
1.5.1	Festkörper . . . . .	45
1.5.2	Flüssigkeiten und Gase . . . . .	47

<b>2</b>	<b>Elektrodynamik</b>	<b>53</b>
2.1	Strom, Spannung und Ladung . . . . .	53
2.1.1	Strom und Ladung . . . . .	53
2.1.2	Spannung . . . . .	55
2.1.3	Das Wassermmodell . . . . .	56
2.2	Der elektrische Widerstand . . . . .	57
2.3	Gleichstromkreise . . . . .	59
2.3.1	Die Kirchhoff'schen Sätze . . . . .	60
2.3.2	Verschaltung von Widerständen . . . . .	61
2.3.3	Der Spannungsteiler . . . . .	62
2.3.4	Wheatstone'sche Brückenschaltung . . . . .	63
2.3.5	Einfluss des Innenwiderstandes von Messgeräten . . . . .	65
2.4	Das elektrische Feld . . . . .	65
2.4.1	Das homogene elektrische Feld . . . . .	66
2.4.2	Influenz und Verschiebungsdichte . . . . .	67
2.4.3	Das inhomogene elektrische Feld . . . . .	69
2.5	Potentiale und Felder . . . . .	69
2.5.1	Das elektrostatische Potential . . . . .	69
2.5.2	Die geladene Kugel . . . . .	70
2.5.3	Elektrischer Dipol . . . . .	71
2.5.4	Der elektrische Fluss . . . . .	74
2.5.5	Ladungsverteilung in Leitern . . . . .	77
2.5.6	Der Kondensator . . . . .	77
2.6	Kräfte im elektrischen Feld . . . . .	82
2.6.1	Energie im Kondensator . . . . .	83
2.6.2	Die Energiedichte im elektrischen Feld . . . . .	84
2.6.3	Kraft zwischen zwei elektrischen Ladungen . . . . .	85
2.6.4	Der elektrische Dipol im homogenen, elektrischen Feld . . . . .	86
2.6.5	Der elektrische Dipol im inhomogenen, elektrischen Feld . . . . .	89
2.7	Materie im elektrischen Feld . . . . .	90
2.7.1	Di- und Paraelektrizität . . . . .	91
2.7.2	Kraft auf ein Dielektrikum im elektrischen Feld . . . . .	92
2.8	Magnetisches Feld und Induktion . . . . .	98
2.8.1	Ursache magnetischer Felder . . . . .	99
2.8.2	Definition des Magnetfeldes . . . . .	100
2.8.3	Induktion . . . . .	100
2.8.4	Die zweite Maxwell'sche Gleichung . . . . .	102
2.8.5	Selbstinduktion . . . . .	103
2.8.6	Energiedichte im Magnetfeld . . . . .	104
2.8.7	Induktion durch Lageänderung . . . . .	105

2.9	Inhomogene Magnetfelder . . . . .	106
2.9.1	Das Biot-Savart'sche Gesetz . . . . .	110
2.10	Kräfte im magnetischen Feld . . . . .	115
2.10.1	Die Lorentzkraft . . . . .	115
2.10.2	Kräfte im homogenen Magnetfeld . . . . .	117
2.10.3	Magnetischer Dipol im inhomogenen Magnetfeld . . . . .	119
2.11	Materie im magnetischen Feld . . . . .	119
2.11.1	Magnetisierung . . . . .	120
2.11.2	Einteilung von Materie nach Magnetisierbarkeit . . . . .	121
2.12	Wechselstromkreise . . . . .	122
2.12.1	Wechselstromgenerator . . . . .	122
2.12.2	Wechselstromwiderstände . . . . .	123
2.12.3	Wechselstromschaltungen in der komplexen Zahlenebene . . . . .	126
2.12.4	Parallelschaltung von Spule und Kondensator . . . . .	127
2.12.5	Transformator . . . . .	128
<b>3</b>	<b>Schwingungen</b>	<b>129</b>
3.1	Allgemeines . . . . .	129
3.2	Freier harmonischer Oszillator . . . . .	129
3.2.1	Mathematische Formulierung . . . . .	129
3.2.2	Dämpfung . . . . .	130
3.2.3	Lineares Federpendel . . . . .	132
3.2.4	Mathematisches Pendel . . . . .	134
3.2.5	Physikalisches Pendel . . . . .	136
3.2.6	Elektrischer Schwingkreis . . . . .	137
3.2.7	Torsionspendel . . . . .	139
3.2.8	Gedämpfte Schwingungen . . . . .	140
3.3	Erzwungene Schwingung . . . . .	142
3.4	Gekoppelte Schwingungen . . . . .	144
3.4.1	Mathematische Beschreibung . . . . .	146
3.5	Schwingungen im Kontinuum . . . . .	149
3.6	Fourieranalyse . . . . .	150
<b>4</b>	<b>Wellen</b>	<b>153</b>
4.1	Wellengleichung . . . . .	154
4.2	Energieübertragung und Intensität . . . . .	155
4.3	Eigenschaften von Wellen . . . . .	157
4.3.1	Superpositionsprinzip . . . . .	157
4.3.2	Interferenz . . . . .	159
4.3.3	Dopplereffekt . . . . .	160

## *Inhaltsverzeichnis*

4.4	Elektromagnetische Wellen - Hertz'scher Dipol . . . . .	163
4.4.1	Erzeugung und Nachweis elektromagnetischer Wellen . . . . .	164
4.4.2	Mathematische Beschreibung . . . . .	167
4.4.3	Wechselwirkung von EM Wellen mit Materie . . . . .	169
4.5	Lichtwellen . . . . .	172
4.5.1	Huygens-Fresnel'sches Prinzip . . . . .	173
4.5.2	Reflexion und Brechung von Licht an Grenzflächen . . . . .	173
4.5.3	Dispersion . . . . .	176
4.5.4	Rayleigh-Streuung . . . . .	177
4.5.5	Beugung . . . . .	177

# 1 Mechanik

## 1.1 Kinematik

»Die Kinematik ist ein Gebiet der Mechanik, das die Bewegung von Körpern rein geometrisch beschreibt mit den Größen Zeit, Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung. Unberücksichtigt bleiben die Kraft, die Masse der Körper und alle davon abgeleiteten Größen wie Impuls oder Energie. Die Kinematik beschreibt somit nur wie sich ein Körper bewegt und wird daher auch als Bewegungsgeometrie bezeichnet.« [1]

### 1.1.1 Gleichförmige Bewegung

Bei einer gleichförmigen Bewegung ist die Geschwindigkeit konstant, da keine Beschleunigung auf den betrachteten Körper wirkt.

Somit ergibt sich ein Weg-Zeit-Diagramm der folgenden Form: Da die Geschwindigkeit über die Zeit konstant bleibt kann die zurückgelegte Strecke einfach über

$$s(t) = v_0 \cdot t \quad (1.1)$$

berechnet werden.

### 1.1.2 Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

Bei der Beschleunigten Bewegung verändert sich die Geschwindigkeit mit der Zeit. Hierbei gilt dass die Beschleunigung nichts anderes als die Geschwindigkeit abgeleitet nach der Zeit ist:

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{dv}{dt} \\ \Leftrightarrow dv &= a(t) \cdot dt \end{aligned} \quad (1.2)$$

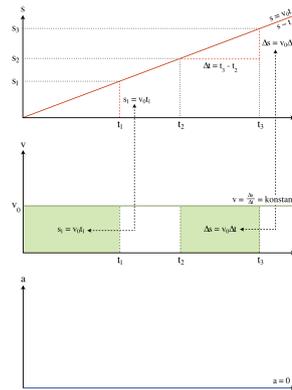


Abbildung 1.1: Verschiedene Diagramme für eine gleichförmige Bewegung [2]

Da sich die Geschwindigkeit nicht-linear ändert muss integriert werden um den zurückgelegten Weg berechnen zu können. Somit ist die Strecke durch  $s(t) = v_0 \cdot t + \int dv \cdot t$  gegeben. Wenn nun die Bedingung aus 1.2 eingesetzt wird, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
 s(t) &= v_0 \cdot t + \int a \cdot t \, dt \\
 \Rightarrow s(t) &= v_0 \cdot t + \frac{1}{2}at^2
 \end{aligned}
 \tag{1.3}$$

### 1.1.3 Horizontaler Wurf

Beim horizontalen Wurf wird ein Objekt parallel zur Horizontalen einmalig beschleunigt, sodass es eine bestimmte Startgeschwindigkeit  $v_0$  besitzt. Dabei fällt auf, dass die horizontale Geschwindigkeit unabhängig von der Vertikalen ist. Demnach kann man und muss die horizontale und vertikale Strecke separat berechnet werden. Wenn davon ausgegangen wird dass das Objekt in der Horizontalen nicht gebremst wird (Reibung wird also vernachlässigt), so kann die zurückgelegte Strecke in der Horizontalen mit Hilfe von Gleichung 1.1 berechnet werden.

In der Vertikalen ist die Geschwindigkeit zunächst gleich Null, da sich das betrachtete Objekt nur in horizontaler Richtung bewegt. Allerdings wirkt hier die Erdbeschleunigung  $g$  nach unten, sodass das Objekt gleichmäßig nach unten beschleunigt wird. Daraus folgt dass es sich um eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung handelt für die Gleichung 1.3 gilt.

Soll die gesamte Bewegung betrachtet werden, so muss mit einem zweidimensiona-

len Vektor gearbeitet werden, der einmal die horizontale und einmal die vertikale Bewegung in sich vereint:

$$v(t) = \begin{pmatrix} v_0 \\ -gt \end{pmatrix}$$

### 1.1.4 Schiefer Wurf

Was passiert nun aber wenn ein Objekt betrachtet wird, dessen Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  bekannt ist, aber es sich nicht in der Horizontalen bewegt? Dann muss die Geschwindigkeit wieder in den horizontalen und vertikalen Anteil zerlegt werden. Dazu kommt das Prinzip der Zerlegung zur Anwendung, das an sich auf einfacher Vektoraddition beruht: Jede vektorielle Größe kann in Einzelgrößen zerlegt werden, solange diese zusammenaddiert wieder die anfängliche Größe ergeben. In diesem konkreten Fall wird diese Zerlegung anhand des Winkels  $\alpha$  des Objektes zur Horizontalen vorgenommen.

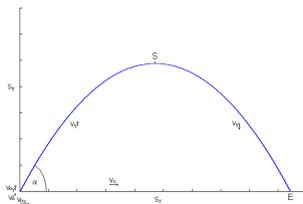


Abbildung 1.2: Eine Skizze zum schiefen Wurf, der um den Winkel  $\alpha$  von der Horizontalen abweicht. [3]

Der horizontale Anteil der Geschwindigkeit kann also über

$$v_h = v_0 \cdot \cos(\alpha) \quad (1.4)$$

und der vertikale Anteil über

$$v_v = v_0 \cdot \sin(\alpha) \quad (1.5)$$

berechnet werden.

Somit wurde also eine Möglichkeit gefunden die Geschwindigkeit in ihre Einzelkomponenten zu zerlegen, sodass erneut die Vektorschreibweise verwendet werden kann. Der Rest der Beschreibung verläuft analog zum Horizontalen Stoß mit dem Unterschied dass der vertikale Anteil der Geschwindigkeit (der zweite Eintrag im Vektor) ebenfalls eine Anfangsgeschwindigkeit besitzt, die berücksichtigt werden muss.

## 1 Mechanik

Unter Zuhilfenahme der Gleichungen 1.4 und 1.5 lässt sich also erneut der Geschwindigkeitsvektor aufstellen:

$$v(t) = \begin{pmatrix} v_h(t) \\ v_v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cdot \cos(\alpha) \\ v_0 \cdot \sin(\alpha) - gt \end{pmatrix}$$

Um den zurückgelegten Weg zu berechnen muss die Geschwindigkeit einfach mit der verstrichenen Zeit multipliziert werden. Wurde die Geschwindigkeit wie in diesem Fall als Vektor betrachtet, so ergibt sich auch für die Strecke ein Vektor, dessen Betrag die Länge der zurückgelegten Strecke beschreibt.

### 1.1.5 Drehbewegung

Bei einer Drehbewegung bewegt sich ein Körper - wie der Name schon sagt - im Kreis. er befindet sich also in einer Drehung um einen Mittelpunkt. Für diese Art von Bewegung können selbstverständlich auch die bisherigen Methoden zur Beschreibung der Bewegung eines Körpers herangezogen werden, allerdings ist es in vielen Fällen günstiger einen speziell auf dieses Szenario angepasstes System zu verwenden.

So wird anstatt der Geschwindigkeit des Körpers (Also der zurückgelegten Strecke pro Zeit) mit der sogenannten Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  gerechnet, die den Anteil einer Kreisbewegung pro Zeiteinheit beschreibt. Der Vorteil dabei ist der, dass die Winkelgeschwindigkeit direkt im Zusammenhang mit der Bewegung auf einem Kreis steht. Wäre beispielsweise nur die Geschwindigkeit des Körpers gegeben und es wäre danach gefragt, wie lange der Körper für eine vollständige Umdrehung braucht, so müsste man den Umfang der Kreisbahn über den Radius berechnen, bevor man eine Antwort finden kann. Mit der Winkelgeschwindigkeit ist die Antwort auf die Frage im Prinzip direkt gegeben (In Worten beschreibt die Winkelgeschwindigkeit ja nur »Das Objekt legt den Anteil x einer ganzen Umdrehung in einer Zeiteinheit zurück«.)

Mathematisch ausgedrückt wird hier also nicht der Weg nach der Zeit abgeleitet ( $v(t) = \frac{dS(t)}{dt}$ ), sondern (da ja eine Winkeländerung pro Zeit(Änderung) interessiert):

$$\omega(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} \tag{1.6}$$

Soll nun der Ort eines Objektes in einer Drehbewegung beschrieben werden, so muss dies wieder vektoriell geschehen, da es ja keine geradlinige Bewegung in nur eine Richtung (eine Dimension) ist, sondern einer x- und einer y-Koordinate bedarf.

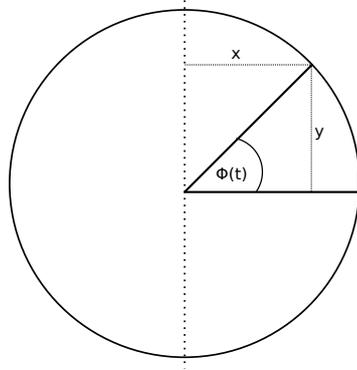


Abbildung 1.3: Skizze zur Drehbewegung

Wenn die Position des Objektes zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t_0$  betrachtet werden soll, so kann man aus Abbildung Abb. 1.3 erschließen dass sich die einzelnen Koordinaten folgendermaßen berechnen lassen (In Abhängigkeit des Radius  $r$ ):

$$\begin{aligned}x &= \cos(\phi(t_0)) \cdot r \\y &= \sin(\phi(t_0)) \cdot r\end{aligned}$$

Wenn man nun nochmals Gleichung 1.6 heran zieht so geht daraus hervor dass folgendes gelten muss (bei gleichbleibender Winkelgeschwindigkeit)

$$\phi(t_0) = \omega \cdot t_0$$

Wenn die Betrachtung auf einen beliebigen Zeitpunkt  $t$  erweitert wird und wieder eine Vektorschreibweise gewählt wird so ergibt sich daraus

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \cdot r \\ \sin(\omega t) \cdot r \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

Somit wurde eine Möglichkeit gefunden den Ort des Objektes zu bestimmen und somit kann die Geschwindigkeit als zeitliche Ableitung des Ortes berechnet werden

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} -\omega \sin(\omega t) \cdot r \\ \omega \cos(\omega t) \cdot r \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

## 1 Mechanik

Ist nur nach dem Betrag der Geschwindigkeit gefragt, so ergibt sich dieser als

$$\begin{aligned}\|\vec{v}\| &= \sqrt{(-\omega \sin(\omega t) \cdot r)^2 + (\omega \cos(\omega t) \cdot r)^2} \\ &= \sqrt{\omega^2 \cdot r^2 \cdot (\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t))} \\ &= \omega \cdot r\end{aligned}$$

Das bedeutet also, dass bei einer betragsmäßigen Betrachtung die Winkelgeschwindigkeit und die normale Geschwindigkeit ganz einfach umgerechnet werden können:

$$v = \omega r \tag{1.9}$$

In diesem Zusammenhang wird die Geschwindigkeit auch als **Bahngeschwindigkeit** bezeichnet. Durch bilden des Skalarproduktes des Ortsvektors  $r(t)$  (1.7) und des Geschwindigkeitsvektors  $v(t)$  (1.8) lässt sich zeigen, dass die beiden stets senkrecht zueinander stehen. Dabei ist wichtig zu verstehen dass  $r(t)$  vom Kreismittepunkt ausgeht.

Wird nun die Bahngeschwindigkeit ihrerseits nach der Zeit abgeleitet, so ergibt sich eine Beschleunigung, die sogenannte **Zentripetalbeschleunigung**.

$$\begin{aligned}\vec{a}_{ZP} &= \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \\ &= \begin{pmatrix} -\omega^2 \cos(\omega t) \cdot r \\ -\omega^2 \sin(\omega t) \cdot r \end{pmatrix} \\ &= -\omega^2 \cdot \vec{r}\end{aligned} \tag{1.10}$$

Wird nun die Richtung der Zentripetalbeschleunigung betrachtet, so ergibt sich, dass sie dem Ortsvektor (vgl. 1.7) entgegen steht und somit ebenfalls senkrecht auf der Bahngeschwindigkeit (vgl. 1.8) steht.

Auch bei der Zentripetalbeschleunigung kann der Betrag (wie bei jedem Vektor) berechnet werden:

$$\|\vec{a}_{ZP}\| = \omega^2 r$$

## 1.2 Dynamik - Translationsbewegungen

Bei der Betrachtung von Translationsbewegungen, also Bewegungen die nur von Punkt A nach Punkt B verlaufen, ohne dass der Körper irgendwie rotiert, kann

jeder Betrachtete Körper auf seinen Schwerpunkt reduziert werden. Durch die Beschreibung der Bewegung des Schwerpunktes kann die Bewegung des gesamten Körpers beschrieben werden.

### 1.2.1 Newton'sche Axiome

#### Trägheitsprinzip

Ein Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Translation, sofern er nicht durch einwirkende Kräfte zur Änderung seines Zustands gezwungen wird.

#### Aktionsprinzip

Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt.

Daraus ergibt sich das sogenannte **Grundgesetz der Mechanik**:

$$\begin{aligned} F &= \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{m \cdot \vec{v}}{dt} \\ \text{Wenn } m &= \text{konst.} & (1.11) \\ &= m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \vec{a} \end{aligned}$$

#### Reaktionsprinzip

Kräfte treten immer paarweise auf. Übt ein Körper A auf einen anderen Körper B eine Kraft aus (actio) so wirkt eine gleich große, aber entgegengerichtete Kraft von Körper B auf Körper A (reactio).

»actio = reactio«

## 1.2.2 Kräfte - Anwendung der Axiome

Eine **Kraft** ist eine vektorielle Größe, dh sie besitzt sowohl einen Betrag, als auch eine Richtung. Des Weiteren bedeutet das, dass eine Kraft stets in Teilkräfte zerlegt werden kann, da ja jeder Vektor als Summe von mehreren Vektoren beschrieben werden kann. Das ist immer dann praktisch, wenn eine Kraft gegeben ist, die aber nicht in die gewünschte Richtung zeigt. In solch einer Situation kann einfach der Anteil der Kraft in die gewünschte Richtung betrachtet werden.

Nach dem zweiten Newton'schen Axiom (1.2.1) ist eine Kraft die Ursache für eine Impulsänderung (Geschwindigkeitsänderung). Demnach ist sie durch Gleichung 1.11 gegeben. Die Einheit der Kraft ergibt sich ebenfalls aus Gleichung 1.11 und ist  $\frac{kg \cdot m}{s^2}$ . Als Abkürzung für diesen Bruch wird sehr häufig auch die Einheit **Newton** ( $N$ ) verwendet. Es gilt also

$$[F] = 1 \frac{kg \cdot m}{s^2} = 1N$$

### Gravitationskraft

»Die **Gravitation**, auch Massenanziehung, Schwerkraft oder Gravitationskraft, ist eine der vier Grundkräfte der Physik. Sie äußert sich in der gegenseitigen Anziehung von Massen. Sie nimmt mit zunehmender Entfernung der Massen ab, besitzt aber unbegrenzte Reichweite. Anders als elektrische oder magnetische Kräfte lässt sie sich nicht abschirmen.«[4]

$$F_G = \Gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad (1.12)$$

Dabei ist spielt die Gravitationskonstante  $\Gamma$  (auch gern mit  $G$  abgekürzt) und beträgt

$$\Gamma = 6,67408 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kgs^2}$$

Soll die Schwerkraft eines Körpers der Masse  $m$  auf der Erde berechnet werden, so lautet die Formel

$$F_G = \Gamma \frac{m \cdot m_{Erde}}{r_{Erde}^2} = m \cdot \Gamma \frac{m_{Erde}}{r_{Erde}^2}$$

Da in sehr vielen Fällen die Gravitationskraft der Erde auf ein betrachtetes Objekt benötigt wird wurde dafür eine neue Konstante berechnet: Die *Erdbeschleunigung*  $g$ :

$$g = \Gamma \frac{m_{Erde}}{r_{Erde}^2} \approx 9,81 \frac{m}{s^2}$$

Wenn vernachlässigt wird, dass die Massenverteilung der Erde inhomogen ist und außerdem auch der Erdradius nicht überall konstant ist - da ja die Erde keine perfekte Kugel ist - kann die Schwerkraft eines Körpers auf der Erde auch über folgende Formel berechnet werden:

$$F_G = m \cdot g \tag{1.13}$$

### Hangabtriebskraft

Die sogenannte Hangabtriebskraft ist ein perfektes Beispiel für die eingangs erwähnte Kräftezerlegung. Sie tritt auf, sobald ein Objekt (auf das die Schwerkraft wirkt) auf einer schiefen Ebene steht:

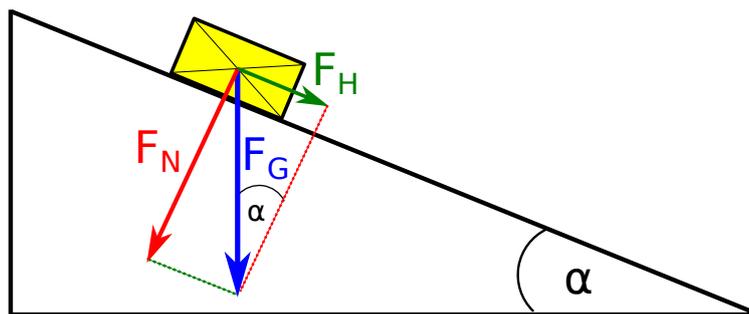


Abbildung 1.4: Skizze zur Hangabtriebskraft

Für dieses Szenario kann selbstverständlich nach Gleichung 1.12 die Gewichtskraft des Objektes (blau) berechnet werden. Allerdings kann mit der Gewichtskraft per se noch nicht erklärt werden, warum dieses Objekt anfangen wird die Ebene hinunter zu rutschen (genügend kleine Reibung vorausgesetzt).

Für jede Bewegungsänderung (In diesem Fall vom Stillstand zum Rutschen) muss nach Newton eine Kraft wirken. Allerdings muss diese Kraft auch in die Richtung der Bewegungsrichtung zeigen, da sonst die Rechnung nicht stimmt. In diesem Fall zeigt aber die Kraft, deren Betrag bekannt ist, nicht in Bewegungsrichtung.

## 1 Mechanik

Deswegen muss hier zunächst eine Kräftezerlegung erfolgen. Dabei muss die Gewichtskraft  $F_G$  so zerlegt werden, dass ein Teil davon in Richtung der Bewegung, also parallel zur Ebene, zeigt.

Ist der Winkel  $\alpha$  der Ebene bekannt, so kann der Anteil der Kraft, der parallel zur Unterlage - auch **Hangabtriebskraft**  $F_H$  genannt (grün) - durch Gleichung 1.14 gegeben.

$$F_H = F_G \cdot \sin(\alpha) \quad (1.14)$$

Dabei ist wichtig zu verstehen, dass bei dieser Berechnung nur der Betrag der Hangabtriebskraft und nicht ihre Richtung berechnet wird (Erkennbar an den fehlenden Vektorpfeilen).

Durch die einfache Kräftezerlegung "entsteht" aber auch noch eine weitere Kraft, die - da die Hangabtriebskraft parallel zur Unterlage steht - senkrecht auf die Unterlage wirkt. Sie gibt also an, mit welcher Kraft das Objekt auf die Unterlage drückt. Sie wird auch **Normalkraft**  $F_N$  genannt (rot in 1.4) und lässt sich durch Gleichung 1.15 berechnen.

$$F_N = F_G \cdot \cos(\alpha) \quad (1.15)$$

### Reibungskräfte

Reibung tritt eigentlich überall auf, wo sich zwei Körper berühren und sich aneinander vorbei bewegen. Dabei kann der zweite "Körper" durchaus auch ein Gas sein (z.B. Luftreibung).

Der Betrag der Reibungskraft  $F_R$  hängt von dem Betrag der Kraft ab, die die beiden Körper orthogonal aufeinander ausüben. In den meisten Fällen also vom Betrag der Normalkraft. Die Richtung der Reibungskraft entspricht immer der Gegenrichtung der Bewegung, dh wenn die Bewegung von links nach rechts erfolgt, so wirkt die Reibungskraft dem entgegen von rechts nach links.

Für verschiedene Reibungstypen und Materialien müssen zudem noch sogenannte Reibungskoeffizienten  $\mu$  mit einberechnet werden, sodass die Reibungskraft folgendermaßen berechnet werden kann:

$$F_R = \mu \cdot F_N \quad (1.16)$$

Allgemein kann gesagt werden, dass die Reibungskoeffizienten immer kleiner als

1 sind und in folgender Reihenfolge abnehmen (Wenn die restlichen Bedingungen gleich bleiben):

- Haftreibung ( $\mu_{HR}$ )
- Gleitreibung ( $\mu_{GR}$ )
- Rollreibung ( $\mu_{RR}$ )

### Federkraft

»Um zu verstehen, was Federkraft ist, sollten zunächst noch einmal vor Augen geführt werden, welche grundlegenden Eigenschaften eigentlich eine Feder ausmachen.

Wird von Federkraft gesprochen, sind damit in der Regel keine Vogelfedern, sondern Federn im technischen Sinne gemeint. Dabei handelt es sich um bestimmte Bauteile, die sich elastisch rückstellend verhalten.

»Elastisch rückstellend“ bedeutet, dass eine Feder bis zu einem gewissen Grad nachgibt, wenn sie belastet wird, und in ihre ursprüngliche Form zurückkehrt, sobald die Belastung wieder nachlässt.

Die Federkraft bezeichnet dementsprechend die Kraft, mit der die Feder versucht, wieder in ihre Anfangsform zurückzukehren. So hat eine Feder, die bei Belastung leicht nachgibt, weniger Federkraft, als eine solche, die bei gleicher Belastung kaum nachgibt.«[5]

Für nicht allzu große Verformungen gilt dabei das **Hook'sche Gesetz** das eine Proportionalität der Federkraft zur momentanen Auslenkung  $x$  der Feder beschreibt. Der Proportionalitätsfaktor heißt hierbei *Federkonstante*  $D$

$$F_F = -D \cdot x \quad (1.17)$$

Das Hook'sche Gesetz gilt dabei recht gut für Metalle und spröde Stoffe wie z.B. Keramik oft sogar bis zum Bruch. Dagegen ist es nicht auf Materialien anzuwenden, die sich plastisch verformen, bevor sie reißen. Außerdem gilt es ebenfalls nicht für Gummi.

## 1 Mechanik

Werden Systeme gekoppelter Federn (siehe Abb. 1.18) betrachtet, so verhalten sich die Federkonstanten folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \text{n Federn in Reihe : } \quad \frac{1}{D_{ges}} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{D_i} \\ \text{n Federn parallel : } \quad D_{ges} &= \sum_{i=1}^n D_i \end{aligned} \tag{1.18}$$

Wie also in Gleichung 1.18 zu erkennen ist, wird die Gesamtfederkonstante  $D_{ges}$  geringer, wenn die einzelnen Federn in Reihe "geschaltet" werden, als wenn die Federkonstanten einzeln betrachtet würden. Das macht auch irgendwo Sinn, da ja die Ausdehnung auf das Gesamtsystem aufgeteilt wird und somit jede Feder für sich gesehen weniger ausgedehnt wird.

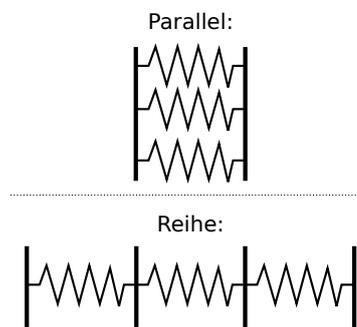


Abbildung 1.5: Skizze zu den Möglichkeiten mehrere Federn zu koppeln

### Trägheitskraft

Nach dem dritten Newton'schen Axiom (vgl. 1.2.1) tritt zu jeder Kraft eine gleich große, entgegen gerichtete Gegenkraft auf. Anders formuliert "wehrt" sich jeder Körper dagegen seinen Bewegungszustand zu ändern (nichts anderes macht eine Kraft, die auf einen Körper wirkt) indem er eine entsprechende Gegenkraft aufbringt. Diese Gegenkraft wird auch als **Trägheitskraft** bezeichnet.

Die Trägheitskraft  $F_{Tr}$  kann bei gegebener Beschleunigung  $\vec{a}$  und Masse  $m$  eines Körpers mithilfe von Gleichung 1.19 berechnet werden.

$$F_{Tr} = -m \cdot \vec{a} \tag{1.19}$$

Bei genauerer Betrachtung von Gleichung 1.19 fällt auf, dass ihr Betrag der allgemeinen Definition einer Kraft (vgl. Gleichung 1.11) entspricht und sich lediglich

## 1.2 Dynamik - Translationsbewegungen

durch das – unterscheiden. Das ist aber durchaus so gewollt, da ja die Trägheitskraft eine Gegenkraft zu einer bestehenden Kraft ist und somit den selben Betrag haben muss und genau in die andere Richtung zeigen muss, was durch das Vorzeichen verwirklicht wird.

Trägheitskräfte werden auch als Scheinkräfte bezeichnet, da sie nicht von anderen Körpern hervorgerufen werden, sondern lediglich durch Beschleunigung des (Bezug-) Systems.

Einen Beweis für die Existenz der Trägheitskräfte ist ein Experiment, bei dem ein Massestück an einem dünnen Faden befestigt ist und an diesem aus dem freien Fall abrupt gebremst wird. Wenn das Massestück schwer genug ist wird der Faden reißen, aber damit dies geschehen kann, müssen zwei Kräfte auf ihn wirken: Einmal die Kraft nach oben, die aufgebracht wird um den Faden fest zu halten, und auf der anderen Seite eine Kraft nach unten, sodass der Faden von diesen beiden entgegen gesetzten Kräften zerrissen werden kann. Diese Kraft nach unten wird dann Trägheitskraft genannt.

Allerdings ist es sehr wichtig im Kopf zu behalten, dass die Trägheitskraft **nicht auf den Körper selbst**, sondern auf den "Verursacher" der Kraft wirkt. Außerdem existiert sie nur innerhalb von beschleunigten Systemen. Somit ergibt sich nämlich nicht das Dilemma, dass davon ausgegangen wird, dass an dem Körper aufgrund der Trägheitskräfte ein Kräftegleichgewicht herrsche, was ja dann eine Änderung des Bewegungszustandes unmöglich machen würde.

Allerdings können mit Hilfe des sogenannten **d'Alembert'schen Prinzips** Probleme in beschleunigten Systemen auf Probleme in statischen Systemen zurückgeführt werden, indem die Trägheitskräfte mit berücksichtigt werden.

Wirkt auf einen Körper die Kraft  $F$  (möglicherweise entstanden durch die Summe der einzelnen an dem Körper angreifenden Kräfte), so gilt Gleichung 1.11, die umgestellt folgendermaßen aussieht:

$$F - ma = 0 = F + F_{Tr}$$

Die mathematische Formulierung des d'Alembert'schen Prinzips lautet daher

$$\sum F + \sum F_{Tr} = 0 \tag{1.20}$$

Da es das betrachtete Problem als ein Kräftegleichgewicht beschreibt, welches

ja aber trotzdem Bewegung verursacht, wird dieser Fall auch als **dynamisches Gleichgewicht** bezeichnet.

### Das Bierkrugexperiment

Bei diesem Experiment steht ein Bierkrug auf einem Papier auf einem Tisch. Nun wird das Papier zur Seite weg gezogen und es stellt sich heraus, dass bei langsamen Ziehen der Bierkrug mit dem Papier zusammen beschleunigt wird, wohingegen er stehen bleibt wenn das Papier schnell zur Seite gezogen wird. Wie in Abbildung 1.6

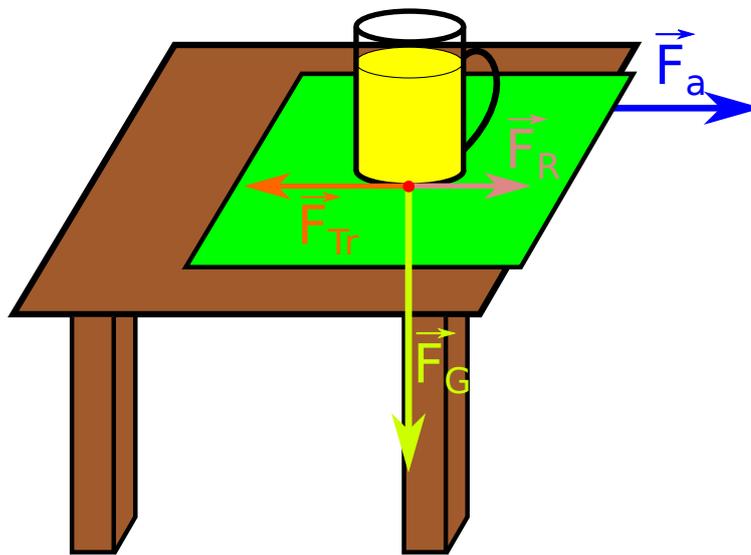


Abbildung 1.6: Skizze zum "Bierexperiment"

zu sehen ist, wird das Papier mit einer Kraft  $\vec{F}_a$  beschleunigt. Dadurch setzt sich das Papier in Bewegung und wirkt somit dieselbe Kraft auf den Bierkrug aus (der Tisch als Solches wird bei dieser Betrachtung vernachlässigt). Dieser setzt dem aber eine entsprechend große Trägheitskraft  $\vec{F}_{Tr}$  entgegen. Gleichzeitig wirkt aber auch eine Reibungskraft  $\vec{F}_R$  zwischen dem Papier und dem Bierkrug, da dieser mit seiner Gewichtskraft  $\vec{F}_G$  auf das Papier drückt, die den Bierkrug in Richtung der Papierbewegung zieht.

Auf den Bierkrug wirken also die Trägheitskraft  $\vec{F}_{Tr}$  und die Reibungskraft  $\vec{F}_R$ . Diese wirken genau entgegengesetzt, dh so lange  $\vec{F}_{Tr}$  kleiner als  $\vec{F}_R$  ist, wird sich der Bierkrug mit dem Papier mit bewegen (wenn auch nicht unbedingt mit voller

Geschwindigkeit).

$$\vec{F}_R = \mu_{HR} \cdot F_G$$

$$\vec{F}_{Tr} = -m \cdot \vec{a}$$

Wie also zu erkennen ist, ist die Reibungskraft unabhängig von der Beschleunigung konstant, aber die Trägheitskraft ist sehr wohl abhängig davon. Um das gegebene Problem (Wie stark beschleunigt werden muss, damit der Bierkrug nicht mit beschleunigt wird) zu lösen muss also folgende Gleichung gelöst werden:

$$\vec{F}_R < \vec{F}_{Tr}$$

$$\mu_{HR} \cdot F_G < |-m \cdot \|\vec{a}\||$$

$$\Leftrightarrow \|\vec{a}\| > \frac{\mu_{HR} \cdot F_G}{m} = \frac{\mu_{HR} \cdot \mathcal{M}g}{\mathcal{M}}$$

$$\Leftrightarrow \|\vec{a}\| > \mu_{HR} \cdot g$$

## Umlenkrollen

Bei der Verwendung von Umlenkrollen werden anfallende Kräfte umgelenkt (wie der Name ja schon sagt). Dabei muss unterschieden werden, ob es sich um eine feste oder eine lose Umlenkrolle handelt, denn bei Letzterer wird nicht nur die Kraft umgelenkt sondern auch gleichmäßig auf beide Seiten aufgeteilt.

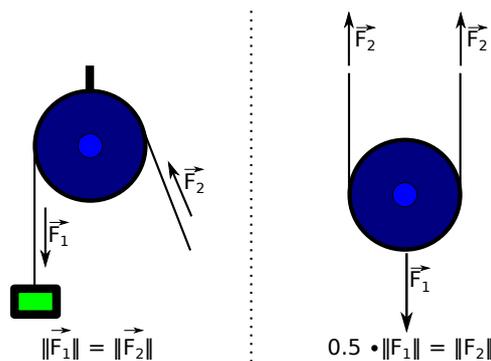


Abbildung 1.7: Skizze zur Funktionsweise fester (links), bzw. loser (rechts) Umlenkrollen

### 1.2.3 Bewegungsgleichungen

»Unter einer **Bewegungsgleichung** versteht man eine mathematische Gleichung (oder auch ein Gleichungssystem), die die räumliche und zeitliche Entwicklung eines mechanischen Systems unter Einwirkung äußerer Einflüsse vollständig beschreibt.«[6]

Das bedeutet, dass hierbei die Erkenntnisse, die aus vorherigem Kapitel über Kräfte und ihre Wirkungsweise angewendet und miteinander verbunden werden müssen. Sehr häufig führt das dann zu Differentialgleichungen, die gelöst werden müssen.

Ein weiterer zentraler Punkt bei Bewegungsgleichungen ist zu erkennen, in welchen anderen physikalischen Größen die gesuchte Größe noch steckt. Beispielsweise der Ort als zweite zeitliche Ableitung in der Beschleunigung.

### 1.2.4 Impuls und Kraftstoß

Der **Impuls**  $p$  ist die zentrale Bewegungsgröße für Körper und kommt in vielen Gleichungen in der Mechanik vor (bevor diese dann mit Annahmen, wie z.B. konstanter Masse vereinfacht werden.).

$$\begin{aligned}\vec{p} &= m \cdot \vec{v} \\ \Delta\vec{p} &= \int \vec{F} dt\end{aligned}\tag{1.21}$$

Wenn die allgemeine Form der Grundgleichung der Mechanik (Gleichung 1.11) betrachtet wird, fällt auf dass diese ebenfalls über den Impuls definiert ist. Sie besagt dass eine Kraft über eine Änderung des Impulses definiert ist. Demnach muss also gelten, dass sich der Impuls eines Systems nicht ändern kann, so lange keine äußere Kraft auf es einwirkt. Diese Erkenntnis wird als **Impulserhaltungssatz** bezeichnet.

#### Impulserhaltung

Der Gesamtimpuls  $P_{ges} = \sum p_i$  eines Systems aus Massekörpern, auf das keine Kraft  $F$  von außen einwirkt (abgeschlossenes System) bleibt erhalten:

$$F = dP_{ges}/dt = 0 \Rightarrow P_{ges} = \sum p_i = constant$$

## Schwerpunkt

In den meisten Fällen (solange keine Rotation involviert ist) genügt es die Bewegung, den Impuls des Massenschwerpunktes zu betrachten.

### Massenschwerpunktsatz

Der Gesamtimpuls eines Systems verhält sich so, als sei die gesamte Masse des Systems im Schwerpunkt vereinigt und bewege sich mit dessen Geschwindigkeit.

Der Schwerpunkt eines Systems bewegt sich so, als sei die gesamte Masse in ihm vereinigt und die äußere Kraft greife an ihm an.

Bei allen Rechnungen mit dem Schwerpunkt wird die betrachtete Größe, um auf den Schwerpunkt bezogen zu werden, als Summe der mit der Masse gewichteten Einzelkomponenten geteilt durch die Gesamtmasse des Systems berechnet. So ergibt sich beispielsweise der Schwerpunkt selbst als Summe der mit der Masse gewichteten Ortsvektoren:

$$\vec{R}_S = \frac{\sum m_i \cdot \vec{r}_i}{m_{\text{gesamt}}} \quad (1.22)$$

Das selbe Prinzip gilt dann beispielsweise auch für die Schwerpunktbeschleunigung oder die Schwerpunktgeschwindigkeit, etc.

Dafür muss lediglich der Ort  $\vec{r}$  in Gleichung 1.22 durch die entsprechende Größe (z.B.  $\vec{a}$  oder  $\vec{v}$ ) ersetzt werden.

Kann ein System nicht in endlich viele Einzelkomponenten zerlegt werden, so geht die Summe aus Gleichung 1.22 in ein Integral über.

Die Reduktion der Bewegung auf die Schwerpunktbewegung ermöglicht es auch die Gesamtbewegung von Systemen, die sich in sich selbst kompliziert bewegen, ziemlich einfach berechnen zu können, da lediglich die Gesamtbewegung berücksichtigt wird.

## Systeme mit veränderlicher Masse

Als Beispiel für ein System mit veränderlicher Masse soll hier eine gasbetriebene Rakete dienen, die dadurch beschleunigt, dass sie Gas nach hinten ausströmen lässt. Das bedeutet, dass die Masse der Gesamtrakete über die Zeit abnimmt, da

## 1 Mechanik

ja ständig Masse in Form von Gas austritt und "verloren" geht. Zum Zeitpunkt

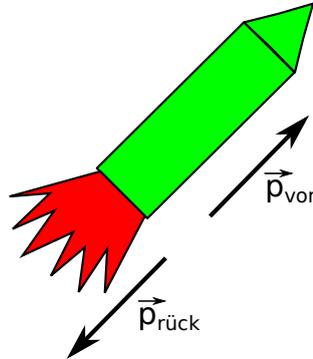


Abbildung 1.8: Skizze zur betrachteten Rakete

$t = 0$  gilt, dass die gesamte Masse  $m_0$  in der Rakete steckt und ab dem Start wird ständige eine bestimmte Masse  $dm$  pro Zeitintervall  $dt$  von der Rakete nach hinten ausgestoßen, wodurch sie an  $d\vec{v}$  Geschwindigkeit gewinnt. Die abgestoßene Masse hat dann einen Impuls  $d\vec{p}_{rck}$  der durch die Geschwindigkeit  $\vec{v}$  minus  $\vec{v}_{Gas}$  des Gases relativ zu Rakete und der abgestoßenen Masse  $dm$  gegeben ist:

$$\begin{aligned}d\vec{p}_{rck} &= (\vec{v} - \vec{v}_{Gas}) \cdot dm \\ &= \vec{v} \cdot dm - \vec{v}_{Gas} \cdot dm\end{aligned}$$

Da aber die Impulserhaltung gilt muss gleichzeitig ein entgegen gerichteter Impuls gleicher Stärke  $d\vec{p}_{vor}$  erzeugt werden, der die Rakete nach vorne treibt. Dieser ist dann logischerweise die Änderung des Impulses der Rakete im Vergleich zu ihrem "Anfangszustand":

$$\begin{aligned}d\vec{p}_{vor} &= d(m \cdot \vec{v}) \\ &= \vec{v} \cdot dm + m \cdot d\vec{v}\end{aligned}$$

Da von außen keine Kräfte auf das System wirken, muss die Gesamtimpulsänderung gleich null sein.

$$\begin{aligned}
 d\vec{p} &= d\vec{p}_{rck} - d\vec{p}_{vor} = 0 \\
 &= \cancel{\vec{v} \cdot d\vec{m}} - \vec{v}_{Gas} \cdot dm - \cancel{\vec{v} \cdot d\vec{m}} - m \cdot d\vec{v} \\
 \\
 &\Leftrightarrow m \cdot d\vec{v} = -\vec{v}_{Gas} \cdot dm \\
 &\Leftrightarrow \int_{v(0)}^{v(t)} d\vec{v} = -\vec{v}_{Gas} \cdot \int_{m_0} m(t) \frac{dm}{m} \\
 &\Leftrightarrow v(t) = -\vec{v}_{Gas} \cdot (\ln(m(t)) - \ln(m_0)) \\
 &\Leftrightarrow v(t) = -\vec{v}_{Gas} \cdot \ln\left(\frac{m(t)}{m_0}\right) \\
 &\Leftrightarrow v(t) = \vec{v}_{Gas} \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right)
 \end{aligned}$$

Somit wurde also eine Möglichkeit gefunden die Geschwindigkeit der Rakete zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t$  zu berechnen, wenn die Ausströmgeschwindigkeit  $v_{Gas}$  konstant ist. Diese Gleichung wird auch **Raketengrundgleichung** genannt.

### 1.2.5 Arbeit, Energie und Leistung

» **Arbeit**  $W$  (von englisch "work") ist in der Physik die Energie, die auf mechanischem Wege auf einen Körper übertragen wird. Man sagt: „An dem Körper wird Arbeit verrichtet“ oder „Arbeit geleistet“. Das geschieht, indem eine Kraft längs eines Weges auf ihn einwirkt.«[7]

Die **Energie**  $E$  bezeichnet dagegen eher den Gesamtenergiegehalt eines Objektes, also eine statische Größe. Sobald Energie von einem Körper auf einen anderen Übertragen wird, wird meist von Arbeit gesprochen. Es kommt allerdings auch häufig vor, dass die Begriffe Energie und Arbeit synonym verwendet werden. Der Anschaulichkeit halber kann die Energie eines Körpers als seine Fähigkeit Arbeit auszuüben angesehen werden, was allerdings nicht allgemeingültig ist.

Diese Arbeit ist definiert als Das Skalarprodukt der wirkenden Kraft  $\vec{F}$  und dem zurückgelegten Weg  $\vec{s}$ . Wenn also die Kraft direkt in Richtung des Weges wirkt, so kann die geleistete Arbeit als Produkt der Beträge von Kraft und Weg berechnet werden.

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} \tag{1.23}$$

## 1 Mechanik

Wie aus Gleichung 1.23 ersichtlich ist die Einheit der Arbeit (und auch der Energie) als das Produkt der Einheiten Newton und Meter. Dieses Produkt wird in den meisten Fällen durch die Einheit *Joule* (J) abgekürzt.

$$[E] = [W] = 1Nm = 1 \frac{kg \cdot m^2}{s^2} = 1J$$

Arbeit und Energie können in den unterschiedlichsten Formen vorkommen. Beispiele dafür sind

- Hubarbeit
- Beschleunigungsarbeit
- Volumenarbeit
- kinetische Energie
- potentielle Energie
- ...

### Anheben eines Körpers

Beim Anheben eines Körper der Masse  $m$  auf die Höhe  $h$  muss die Arbeit

$$W_{Hub} = F_G \cdot h = mg \cdot h$$

aufgebracht werden. Soll der selbe Körper auf die selbe Höhe gebracht werden, aber dieses mal eine schiefe Ebene hoch gezogen werden, so muss während dem Ziehen (Reibung und Trägheit sollen vernachlässigt werden) gegen die Hangabtriebskraft  $\vec{F}_H$  (siehe Gleichung 1.14) gezogen werden. Somit ergibt sich die aufgebrachte Arbeit durch

$$\begin{aligned} W_{Ziehen} &= F_H \cdot s \\ &= mg \cdot \sin(\alpha) \cdot s \\ &= mg \cdot \cancel{\sin(\alpha)} \cdot \frac{h}{\cancel{\sin(\alpha)}} \\ &= mg \cdot h \\ &= W_{Hub} \end{aligned}$$

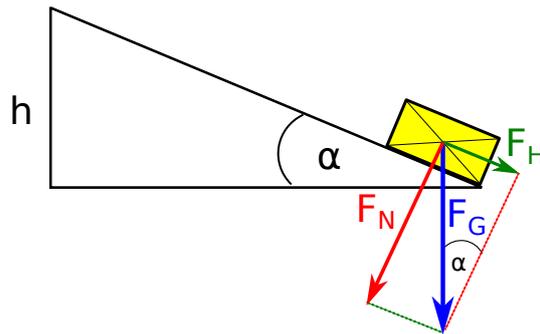


Abbildung 1.9: Skizze zum Hochziehen eines Körpers auf einer schiefen Ebene

Wie aus dieser Rechnung ersichtlich, ist es vollkommen egal auf welchem Weg der Körper auf die Höhe gebracht wird, da immer die selbe Arbeit verrichtet werden muss. Diese Wegunabhängigkeit gilt nicht nur für diesen speziellen Fall, sondern ist für die Energie und Arbeit allgemein gültig!

### Wegunabhängigkeit

Die Energie, bzw. Arbeit ist unabhängig von dem gewählten Weg. So muss die selbe Arbeit aufgewendet werden um einen Körper auf eine bestimmte Höhe zu bringen wenn er eine schiefe Ebene hinauf gezogen wird, wie wenn er direkt hoch gehoben würde.

### Wegabhängige Kraft

Wenn die aufgewendete Kraft nicht konstant ist, sondern sich über den Weg verändert, so muss der Weg in unendlich kleine Schritte  $ds$  unterteilt werden, was dann zu einem Integral führt.

$$W = \int_{s_0}^s \vec{F}(\vec{s}) d\vec{s} \quad (1.24)$$

Dieses Phänomen ist sehr gut am Beispiel einer Feder bei der Berechnung der Spannarbeit (Also der Arbeit die verrichtet werden muss, um die Feder zu spannen) zu sehen. Wie in Gleichung 1.17 zu sehen ist die Spannkraft einer Feder abhängig von ihrer Auslenkung  $x$  (was auch als Weg aufgefasst werden kann). Demnach kann auch diese Auslenkung in unendlich kleine Teilschritte  $dx$  zerlegt werden.

$$W(x) = \int F_{Feder} dx = \int Dx \cdot dx = D \cdot \int x \cdot dx = \frac{1}{2} Dx^2 \quad (1.25)$$

Mit dieser Gleichung kann nun also die Arbeit berechnet werden, die benötigt wird um eine Feder (für die das Hook'sche Gesetz gilt) um die Strecke  $x$  aus der Ruhelage zu spannen.

## Kinetische Energie

Kinetische Energie ist diejenige Energie, die ein System aufgrund seiner Geschwindigkeit besitzt. Anders ausgedrückt ist es die Arbeit die benötigt wird, um das entsprechende Objekt von 0 auf diese Geschwindigkeit zu beschleunigen.

Durch Kombination aus Gleichung 1.11 und 1.24 geht folgender Zusammenhang hervor:

$$\begin{aligned} E_{kin} &= \int F \cdot d\vec{s} \\ &= \int \frac{dp}{dt} \cdot d\vec{s} \end{aligned}$$

Da sich die Masse eines Körpers durch die Änderung der Geschwindigkeit nicht ändert (zumindest nicht bei alltäglichen Geschwindigkeiten), vereinfacht sich die Gleichung zu

$$E_{kin} = \int m\vec{a} \cdot d\vec{s}$$

Mit dem Wissen, dass die Beschleunigung die erste Ableitung der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  nach der Zeit ist (vgl. 1.2) und die Geschwindigkeit  $\vec{v}$  selbst die erste Ableitung des Ortes  $\vec{s}$  ist, kann folgende Vereinfachung vorgenommen werden[8]:

$$\begin{aligned} E_{kin} &= m \cdot \int \vec{a} \cdot d\vec{s} = m \cdot \int \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{s} = m \cdot \int \frac{d\vec{s}}{dt} \cdot d\vec{v} \\ &= m \cdot \int \vec{v} \cdot d\vec{v} \end{aligned}$$

Durch lösen dieses Integrals ergibt sich nun eine Formel für die kinetische Energie eines Körpers der Masse  $m$  und der Geschwindigkeit  $\vec{v}$

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 \tag{1.26}$$

## Leistung

Die **Leistung**  $P$  beschreibt eine Arbeitsänderung  $dW$  pro Zeit. Sie ist demzufolge definiert durch

$$P = \frac{dW}{dt} \quad (1.27)$$

und hat die Einheit  $1 \frac{J}{s} = 1W$  (Watt). Hierbei muss nun darauf geachtet werden, dass die Einheit Watt nicht mit der Arbeit verwechselt wird!

Wenn also die Leistung statt der Arbeit gegeben ist, so muss erst über die Zeit integriert werden, um die verrichtete Arbeit zu erhalten, womit dann weiter gerechnet werden kann.

### Energieerhaltung

Energie kann weder erzeugt noch vernichtet werden. Sie kann lediglich transferiert und umgewandelt werden.

Das bedeutet, dass ohne das verrichten von Arbeit die Gesamtenergie eines Systems konstant bleibt!

## 1.2.6 Teilchensysteme und Erhaltungssätze

In diesem Kapitel geht es um die Anwendung der bisherigen Erhaltungssätze im Bezug auf die Interaktion zwischen zwei oder mehreren Objekten. Diese Interaktion erfolgt in Form von Stößen.

Bei Stößen wird der vollkommen elastische (die vorhandene Kinetische Energie wird nur übertragen und nicht umgewandelt), der vollkommen unelastische (die vorhandene kinetische Energie wird so gut wie möglich in innere Energie umgewandelt, weswegen die Körper nach dem Stoß zusammen kleben) und der teil-elastische (reale) Stoß unterschieden. Bei allen Stößen ändern sich die Impulse und Energien der einzelnen Komponenten, aber wenn alle Komponenten als ein System betrachtet werden, muss nach dem Energie-, bzw. Impulserhaltungssatz die Summe der Energien, bzw. Impulsen gleich groß sein. Da bei den Energien das Problem auftritt, dass diese in nicht oder nur schlecht messbare Formen umgewandelt werden können, wird bei den Stößen meist mit dem Impulserhaltungssatz gerechnet (Der

vollkommen elastische Stoß ist dabei als solcher definiert, bei dem die kinetische Energie nur übertragen und nicht umgewandelt wird (in z.B. innere Energie) weswegen bei vollkommen elastischen Stößen auch sehr gut mit der Energieerhaltung bezüglich der kinetischen Energie gerechnet werden kann).

Des Weiteren kann bei Stößen auch aufgrund der Art des Zusammenstoßes unterschieden werden. Im einfachsten Fall handelt es sich um einen geraden Stoß, bei dem sich die Schwerpunkte der beiden beteiligten Körper auf einer Linie bewegen und auch der Stoßpunkt auf Selbiger liegt. Außerdem gibt es noch den zentrischen Stoß bei dem die Bewegungsrichtungen der Schwerpunkte nicht gleich ist, aber die Verbindungslinie senkrecht auf der Stoßlinie steht, und exzentrischen Stoß, bei dem dies nicht der Fall ist.

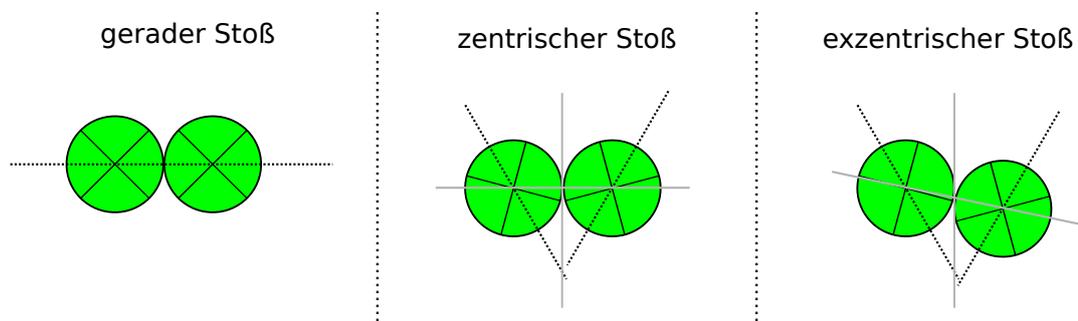


Abbildung 1.10: Skizzen zu den verschiedenen Stoßtypen

### Gerader, zentraler, elastischer Stoß

Bei dieser Art von Stoß treffen zwei Körper gerade aufeinander und die kinetische Energie wird nicht in innere Energie umgewandelt. Das bedeutet, dass wenn die Körper der Massen  $m_1$  und  $m_2$  die Geschwindigkeit  $v_1$  und  $v_2$  haben, so muss für die Geschwindigkeiten  $v_n$  nach dem Stoß folgendes gelten:

$$E_{kin_{vor}} = E_{kin_{nach}}$$

$$\frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) = \frac{1}{2}(m_1 v_{n1}^2 + m_2 v_{n2}^2)$$

$$m_1(v_1^2 - v_{n1}^2) = m_2(v_{n2}^2 - v_2^2)$$

$$(I) \quad m_1(v_1 - v_{n1})(v_1 + v_{n1}) = m_2(v_{n2} - v_2)(v_{n2} + v_2)$$

## 1.2 Dynamik - Translationsbewegungen

Des Weiteren gilt natürlich auch die Impulserhaltung

$$\begin{aligned} p_{\text{vor}} &= p_{\text{nach}} \\ m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 v_{n_1} + m_2 v_{n_2} \\ \text{(II)} \quad m_1(v_1 - v_{n_1}) &= m_2(v_{n_2} - v_2) \end{aligned}$$

Wie zu erkennen ist, sind in beiden Gleichungen noch zwei Unbekannte vorhanden, sodass beide nun kombiniert werden müssen. Dazu wird (I) durch (II) geteilt:

$$\begin{aligned} v_1 + v_{n_1} &= v_2 + v_{n_2} \\ \Rightarrow v_{n_1} &= v_2 + v_{n_2} - v_1 \\ \Rightarrow v_{n_2} &= v_1 + v_{n_1} - v_2 \end{aligned}$$

Somit wurde eine Möglichkeit gefunden die beiden Endgeschwindigkeiten über die anderen Größen auszudrücken, was nun wieder in (I) oder (II) eingesetzt werden kann, um eine der beiden Unbekannten zu eliminieren. In diesem Beispiel soll nun  $v_{n_2}$  in (II) eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} m_1(v_1 - v_{n_1}) &= m_2(v_1 + v_{n_1} - v_2 - v_2) \\ m_1(v_1 - v_{n_1}) &= m_2(v_1 + v_{n_1} - 2v_2) \\ m_1 v_1 - m_1 v_{n_1} &= m_2 v_1 + m_2 v_{n_1} - 2m_2 v_2 \\ m_1 v_1 - m_2 v_1 + 2m_2 v_2 &= m_2 v_{n_1} + m_1 v_{n_1} \\ m_1 v_1 - m_2 v_1 + 2m_2 v_2 &= v_{n_1}(m_2 + m_1) \\ v_{n_1} &= \frac{m_1 v_1 - m_2 v_1 + 2m_2 v_2}{m_2 + m_1} \\ v_{n_1} &= \frac{m_1 v_1 + m_2(2v_2 - v_1)}{m_2 + m_1} \end{aligned}$$

Die Gleichung für  $v_{n_2}$  lässt sich analog dazu lösen, sodass sich für den geraden, zentralen, elastischen Stoß allgemein folgende Beziehungen ergeben:

$$\begin{aligned} v_{n_1} &= \frac{m_1 v_1 + m_2(2v_2 - v_1)}{m_2 + m_1} \\ v_{n_2} &= \frac{m_2 v_2 + m_1(2v_1 - v_2)}{m_2 + m_1} \end{aligned} \tag{1.28}$$

### Gerader, zentraler, unelastischer Stoß

Bei dieser Art des Zusammenstoßes wird der maximal mögliche Teil der kinetischen Energie in innere Energie umgewandelt (z.B. durch Verformung), weshalb

## 1 Mechanik

es nicht sinnvoll ist zu versuchen über die Energieerhaltung zu rechnen. Allerdings sind beide Körper nach dem Stoß vereint (sie kleben sozusagen aneinander), sodass sie beide zwangsläufig die selbe Endgeschwindigkeit  $v_n$  haben, sodass die Impulserhaltung eine Gleichung mit nur einer Unbekannten liefert und dementsprechend gelöst werden kann.

$$\begin{aligned}p_{vor} &= p_{nach} \\m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 v_n + m_2 v_n\end{aligned}$$

Somit kann also die Endgeschwindigkeit der beiden vereinten Körper folgendermaßen berechnet werden:

$$v_n = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad (1.29)$$

### Newton-Pendel

Ein Newton-Pendel (Abb.: 1.11) besteht klassischerweise aus 6 gleich schweren Kugeln die alle an einem Faden von der Halterung hängen und sich im Ruhezustand alle berühren. Nun wird eine oder mehrere Kugel(n) ausgelenkt und losgelassen, sodass sie auf die anderen Kugeln aufprallt. Was zu beobachten ist, ist dass auf der anderen Seite eine oder mehrere Kugel(n) wieder weg fliegen und somit eine Pendelbewegung entsteht.

Bei einem Newton-Pendel handelt es sich näherungsweise um einen elastischen Stoß, sodass sowohl die Impulserhaltung, als auch die Energieerhaltung für die kinetische Energie gilt. Werden nun also  $i$  Kugeln ausgelenkt und  $f$  sei die Anzahl an Kugeln, die auf der anderen Seite weg fliegen, so ergibt sich dank der gleichen Masse  $m$

$$\begin{aligned}p_{vor} &= p_{nach} \\i \cdot m v_i &= f \cdot m v_f\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E_{kin_{vor}} &= E_{kin_{nach}} \\i \cdot \frac{1}{2} m v_i^2 &= f \cdot \frac{1}{2} m v_f^2\end{aligned}$$

Wird nun die erste Gleichung (Impuls) quadriert und durch die zweite Gleichung (Energie) geteilt, so ergibt sich

$$\begin{aligned}i \cdot \cancel{m} &= f \cdot \cancel{m} \\i &= f\end{aligned}$$

Damit ist also bewiesen, dass bei Kugeln gleicher Masse immer gleich viele Kugeln weg fliegen, wie anfangs ausgelenkt wurden.

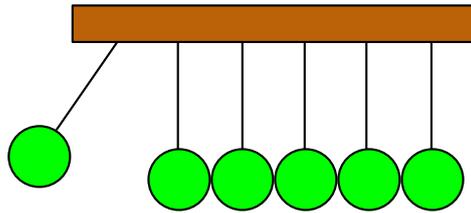


Abbildung 1.11: Skizze eines Newton-Pendels bei dem gerade eine Kugel ausgelenkt ist

## 1.3 Dynamik - Rotationsbewegungen

Bei einer Rotationsbewegung handelt es sich um die Rotation eines Objektes um eine Drehachse. Wichtig dabei ist, dass diese Bewegung nur umständlich oder gar nicht mit den Mitteln zur Beschreibung einer Translationsbewegung beschrieben werden können. Deswegen hat jede Größe (z.B. Geschwindigkeit, Beschleunigung, etc.) ein entsprechendes Pendant bei einer Drehbewegung (z.B. Winkelgeschwindigkeit, Winkelbeschleunigung, etc.). Ein weiterer wichtiger Punkt ist, dass bei einer Drehbewegung **nicht mehr nur der Massenschwerpunkt betrachtet werden darf!**

### 1.3.1 Winkelbeschleunigung

Die **Winkelbeschleunigung**  $\alpha$  beschreibt die zeitliche Änderung der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ :

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \quad (1.30)$$

Mit der "normalen" Beschleunigung  $a$  einer Translationsbewegung hängt die Winkelbeschleunigung betragsmäßig folgendermaßen zusammen:

$$\alpha = \frac{a}{r} \quad (1.31)$$

Somit kann also jeder Winkelbeschleunigung auch gleichzeitig eine translatorische Beschleunigung zugeordnet werden. Dabei ist dies die Beschleunigung eines

Punktes auf der Kreisbahn mit dem Radius  $r$ . Somit wird die Strecke also wieder in Metern gemessen (der Umfang des Kreises), sodass sich das Ganze auch als Translationsbewegung vorstellen kann, wobei der Kreis "abgewickelt" und der Länge nach "ausgestreckt" wird, sodass sich der betrachtete Punkt auf einer geraden Strecke der Länge des Kreisumfangs bewegt.

Das wird besonders nützlich, wenn das rotierende Objekt zum Beispiel ein Rad ist, welches auf dem Boden steht und somit die Beschleunigung eines Außenpunktes des Rads der Gesamtbeschleunigung des Rads entspricht.

### 1.3.2 Zentripetalkraft

Die **Zentripetalkraft**  $\vec{F}_{ZP}$  ist diejenige Kraft die aufgebracht werden muss, damit sich ein Körper auf einer Kreisbahn bewegt. Warum es dazu eine Kraft braucht ist eigentlich relativ klar, denn auf einer Kreisbahn ändert sich der Impuls ständig, da er seine Richtung ändert (da sich ja die Richtung der Geschwindigkeit ebenfalls ständig ändert). Wenn aber eine Impulsänderung erfolgen kann muss nach Gleichung 1.11 eine Kraft auf den Körper wirken. Und genau diese Kraft kann die Zentripetalkraft sein. Selbstverständlich könnte die angreifende Kraft in verschiedenen Winkeln angreifen, aber letztendlich würde doch der Anteil der Kraft für die Kreisbahn verantwortlich sein, der senkrecht auf dem Impuls steht (Im Fall eines Kreises immer in Richtung des Mittelpunktes). Dieser senkrechte Anteil der wirkenden Kraft wird dann Zentripetalkraft genannt. Das bedeutet es gilt stets  $\vec{F}_{ZP} \perp \vec{p}$ .

Mithilfe der Zentripetalbeschleunigung (Gleichung 1.10) und der Grundgleichung der Mechanik (1.11) kann nun die Zentripetalkraft berechnet werden:

$$\vec{F}_{ZP} = m \cdot \vec{a}_{ZP} = m \cdot (-\omega^2) \cdot \vec{r} = -m\omega^2 \cdot \vec{r}$$

Eine betragsmäßige Betrachtung (die ausreicht, da ja die Richtung der Zentripetalkraft immer klar ist), die ein einfach Umrechnung der Winkelgeschwindigkeit in die normale Geschwindigkeit erlaubt (siehe 1.9) ergibt dann folgende Berechnungsmöglichkeiten:

$$F_{ZP} = mr\omega^2 = mr \left(\frac{v}{r}\right)^2 = \frac{mv^2}{r} \quad (1.32)$$

Die der Zentripetalkraft entgegen wirkende Trägheitskraft wird **Zentrifugalkraft** genannt.

### 1.3.3 Drehmoment

Das **Drehmoment**  $\vec{M}$  bei einer Drehbewegung ist das Pendant zur Kraft bei einer Translationsbewegung. Der entscheidende Unterschied liegt darin, dass beim Drehmoment berücksichtigt wird, wo eine Kraft relativ zur Drehachse angreift.

Das Drehmoment ist letztendlich nichts anderes als das Hebelgesetz, welches besagt, dass eine Kraft "größer wird" wenn der Hebelarm länger ist. Und genau das ist das Drehmoment: Ein Produkt (Kreuzprodukt) aus der wirkenden Kraft  $\vec{F}$  und dem Ortsvektor des Angriffspunktes  $\vec{r}$  (relativ zur Drehachse - entspricht dem "Radiusvektor").

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (1.33)$$

Sobald also eine Kraft auf ein System wirkt, das um eine Drehachse rotiert (z.B. Balkenwaage) muss mit dem Drehmoment gerechnet werden.

Um den Betrag des Drehmomentes auszurechnen genügt es den Radius  $r$  mit dem Betrag der senkrecht angreifenden Kraft  $|\vec{F}_\perp|$  zu multiplizieren

$$|\vec{M}| = r \cdot |\vec{F}_\perp|$$

Die Richtung des Drehmomentes, welche einfach über die "Rechte-Hand-Regel" bestimmt werden kann, gibt den sogenannten Drehsinn des Drehmomentes an. Dieser Drehsinn zeigt in die Richtung der Drehachse.

#### Rechte-Hand-Regel

Mit dieser Regel kann die Richtung des resultierenden Vektors  $\vec{V}_{res}$  eines Kreuzproduktes  $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = \vec{V}_{res}$  bestimmt werden. Dabei wird mit dem Daumen der rechten Hand in Richtung des ersten Vektors  $\vec{V}_1$  und der rechte Zeigefinger in die Richtung des zweiten Vektors  $\vec{V}_2$ . Der nun senkrecht zum Zeigefinger abgespreizte Mittelfinger zeigt dann in die Richtung des resultierenden Vektors  $\vec{V}_{res}$ .

### 1.3.4 Drehimpuls

Der **Drehimpuls**  $\vec{L}$  bei der Drehbewegung ist das Pendant zum Impuls bei der Translationsbewegung. So wie der Impuls über eine zeitlich einwirkende Kraft de-

finiert werden kann (siehe Gleichung 1.21), ist auch der Drehimpuls über die korrespondierende Größe, ein zeitlich einwirkendes Drehmoment, definiert.

$$\Delta \vec{L} = \int \vec{M} dt \quad (1.34)$$

Aus dieser Gleichung geht dann auch folgender Zusammenhang hervor:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

Das bedeutet also, dass eine Änderung des Drehimpulses nur dann erfolgen kann, wenn ein Drehmoment wirkt. Demnach gilt also für den Drehimpuls genauso eine Erhaltung, wie für den Impuls, nur dass eben ein Drehmoment statt einer Kraft einwirken muss, um ihn zu verändern.

### Drehimpulserhaltung

»Der Drehimpuls eines isolierten physikalischen Systems [, dh. es wirkt kein Drehmoment,] bleibt nach Betrag und Richtung unverändert, egal welche Kräfte und Wechselwirkungen zwischen den Bestandteilen des Systems wirken.«[9]

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

Mit der Definition des Drehmomentes (Gleichung 1.33) und der der Kraft (Gleichung 1.11) kann noch eine weitere Ausdrucksweise für den Drehimpuls gefunden werden:

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \\ \Leftrightarrow \int \vec{M} dt &= \int \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \int \frac{d\vec{p}}{dt} dt \\ &= \vec{r} \times \vec{p} \end{aligned}$$

Da ja  $\int \vec{M} dt$  nichts anders als der Drehimpuls  $\vec{L}$  ist, kann dieser also nach obiger Herleitung mit dem einwirkenden Impuls  $\vec{p}$  und dem Ort  $\vec{r}$ , an dem dieser angreift, berechnet werden.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (1.35)$$

Für eine Betragsmäßige Betrachtung des Drehimpulses ergibt sich dementsprechend

$$L = r \cdot p_{\perp} \quad (1.36)$$

### 1.3.5 Trägheitsmoment

Wie bisher jede bekannte Größe aus der Translationsbewegung hat auch die Masse ein entsprechendes Pendant, welches **Trägheitsmoment**  $J$  genannt wird.

$$J = \int r^2 dm \quad (1.37)$$

Wenn kein kontinuierlicher Körper, sondern ein Massenpunkt betrachtet wird, so ist es nicht nötig die Gesamtmasse in unendlich viele Massenteile  $dm$  zu zerlegen und diese dann mit dem Radius im Quadrat  $r^2$  gewichten (Was genau das ist, das hinter obiger Integration steckt), sondern es genügt diesen einzelnen Massenpunkt zu betrachten:

$$J = mr^2$$

Dass dieses Trägheitsmoment in diese Form existieren muss, kann recht einfach über die Rotationsenergie hergeleitet werden. Diese ist nichts anderes als die Summe der kinetischen Energie eines jeden Massenpunktes des sich drehenden Körpers. Damit jeder einzelne Massenpunkt berücksichtigt werden kann, muss die Gesamtmasse in infinitesimal kleine Massenteile  $dm$  zerlegt werden, für die nach Gleichung 1.26 die kinetische Energie berechnet werden kann. Demnach ergibt sich also die Gesamtenergie (die Rotationsenergie) des Körpers aus der Summe der kinetischen Energien der einzelnen Massenteile und da es sich um infinitesimal kleine Massenteile handelt wird aus dieser Summe ein Integral:

$$E_{Rot} = \int \frac{1}{2} v^2 dm = \frac{1}{2} \int v^2 dm$$

Die Geschwindigkeit kann nicht aus dem Integral gezogen werden, da sie sich ja von Massenpunkt zu Massenpunkt ändert (abhängig vom Radius). Für genau dieses Problem wird bei der Rotation aber die Winkelgeschwindigkeit verwendet. Da für die Energie nur der Betrag der Geschwindigkeit eine Rolle spielt kann nach Gleichung 1.9 die Geschwindigkeit durch Radius  $r$  und Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  ersetzt werden.

$$E_{Rot} = \frac{1}{2} \int (r\omega)^2 dm = \frac{1}{2} \int r^2 \omega^2 dm = \frac{1}{2} \omega^2 \int r^2 dm$$

Wenn diese Gleichung nun mit der für die kinetische Energie (1.26) verglichen wird, so ergeben sich sehr starke Parallelen. Das Einzige das noch nicht so recht ins Bild passt ist das Integral, welches an Stelle der Masse in der Gleichung steht. Wenn aber nochmals Gleichung 1.37 heran gezogen wird, so stellt sich heraus, dass dies genau das Trägheitsmoment ist und da es sozusagen an der Stelle der Masse in der Gleichung steht, fällt es nicht schwer zu glauben, dass das Trägheitsmoment das Pendant zur Masse ist, wenn es um Rotation statt Translation geht.

## 1 Mechanik

Wenn diese Erkenntnis nun in die Gleichung eingesetzt wird, so ergibt sich eine einfache Gleichung für die Rotationsenergie:

$$E_{Rot} = \frac{1}{2} J \omega^2 \quad (1.38)$$

Das gleiche Prinzip lässt sich auch auf den Drehimpuls anwenden: Dieser kann als die Summe aller Einzelimpulse der Massenteile  $dm$  angesehen werden, die nach Gleichung 1.21 berechnet werden können, und mit dem entsprechenden Radius gewichtet werden müssen, angesehen werden..

$$L = \int r v dm = \int \omega r^2 dm = \omega \int r^2 dm$$

Auch hier kann wieder die Definition des Trägheitsmoments eingesetzt werden, sodass sich folgender Zusammenhang zwischen dem Drehimpuls und dem Trägheitsmoment ergibt:

$$L = J \omega \quad (1.39)$$

Des Weiteren besteht analog zum zweiten Newton'schen Axiom (siehe 1.11) ein Zusammenhang zwischen dem Drehmoment  $M$  und dem Trägheitsmoment über die Winkelbeschleunigung  $\alpha$ :

$$M = J \cdot \alpha \quad (1.40)$$

### Satz von Steiner

Bisher wurde das Trägheitsmoment immer betrachtet, wenn die Drehachse durch den Schwerpunkt geht. Aber das muss natürlich nicht immer so sein. Für eine Parallelverschiebung der Drehachse vom Schwerpunkt weg, kann das Trägheitsmoment über den **Satz von Steiner** anwenden, um das Trägheitsmoment für die neue Drehachse zu berechnen.

$$J = J_S + m_{ges} \cdot d^2 \quad (1.41)$$

Das "neue" Trägheitsmoment  $J$  kann also ausgehend von dem Trägheitsmoment bei Rotation um den Schwerpunkt  $J_S$  mit Hilfe der Gesamtmasse des Körpers  $m_{ges}$  und dem Abstand der tatsächlichen Drehachse zu der Drehachse durch den Schwerpunkt  $d$  berechnet werden.

Ein derartig rotierender Körper besitzt nach Gleichung 1.39 berechnet werden:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= J \cdot \vec{\omega} = (J_S + m_{ges} \cdot d) \vec{\omega} \\ &= J_S \cdot \vec{\omega} + m_{ges} \cdot d \cdot \vec{\omega} \end{aligned}$$

Der Gesamtdrehimpuls kann also in zwei Teile aufgeteilt werden. Der erste heißt dabei **Eigendrehimpuls**  $L_E$

$$J_E = J_S \cdot \vec{\omega} \quad (1.42)$$

und der zweite Teil wird als **Bahndrehimpuls**  $L_B$  bezeichnet.

$$J_B = m_{ges} \cdot d \cdot \vec{\omega} \quad (1.43)$$

In Worten formuliert beschreibt der Eigendrehimpuls den Drehimpuls des Körpers bezogen auf eine Rotation durch seinen Schwerpunkt, wohingegen der Bahndrehimpuls den Drehimpuls des Schwerpunktes bei Rotation um die tatsächliche Drehachse beschreibt.

### 1.3.6 Arbeit, Energie und Leistung

Bei einer Translationsbewegung war die Arbeit  $W$  als die aufgewendete Kraft pro Strecke definiert. Bei der Drehbewegung werden einfach die Kraft und der Weg durch ihre entsprechenden Größen bei Drehbewegungen (Drehmoment und Winkel) ausgetauscht, um die Arbeit zu berechnen.

$$W = \int \vec{M}(\phi) d\phi \quad (1.44)$$

Was die Energie angeht, die in einem rotierenden System steckt, so wird diese durch die sogenannte Rotationsenergie beschrieben, was der kinetischen Energie bei einer Translationsbewegung entspricht. Die Formel dafür wurde schon hergeleitet (siehe Gleichung 1.38) und kann auch über den Drehimpuls berechnet werden:

$$\vec{L} = J\vec{\omega} E_{Rot} = \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{L^2}{2J}$$

#### Torsionsfeder

Eine Torsionsfeder ist einfach eine Feder, die statt auseinander gezogen verdreht wird. Somit handelt es sich quasi um das Prinzip einer Feder nur eben in der Rotation. Dementsprechend wird in diesem Zusammenhang auch nicht von einer Rückstellkraft, sondern von einem Rückstellmoment  $D^*$  gesprochen und anstatt einer Kraft ergibt sich ein Drehmoment:

$$M = D^* \cdot \phi$$

Soll nun die Arbeit berechnet werden, die zum Verdrehen der Torsionsfeder aufgebracht werden muss, so kann einfach Gleichung 1.44 heran gezogen werden:

$$\begin{aligned} W &= \int M d\phi = \int D^* \phi d\phi = D^* \int \phi d\phi \\ &= \frac{1}{2} D^* \phi^2 \end{aligned}$$

Auch bei dieser Gleichung fällt beim Vergleich zur "normalen" Feder (siehe 1.25) auf, dass es sich im Prinzip um die selbe Gleichung handelt, nur dass alle "Translationsgrößen" durch "Rotationsgrößen" ausgetauscht wurden.

### 1.3.7 Abbremsen einer Kugel auf schiefer Ebene

Bei diesem Experiment soll eine Kugel der Masse  $m$  auf einer schiefen Ebene mit dem Steigungswinkel  $\varphi$  los gelassen werden. Nun ist die Frage mit welcher Beschleunigung die Kugel erfährt, wenn sie rollt, bzw. wenn sie währenddessen noch zusätzlich abgebremst wird. Wenn zunächst einmal angenommen wird, dass

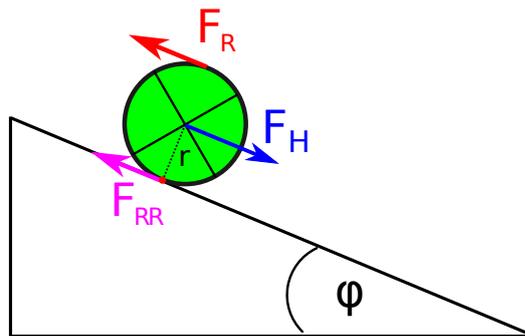


Abbildung 1.12: Skizze zur Kugel, welche eine schiefe Ebene herunter rollt und dabei gebremst wird

die Ebene reibungsfrei wäre ( $F_{RR} = 0$ ) und die Kugel auch nicht gebremst wird ( $F_R = 0$ ), so ist die einzige Kraft, welche auf die Kugel wirkt die Hangabtriebskraft  $F_H$  (siehe Gleichung 1.14).

$$F_{ges} = F_H = F_G \cdot \sin(\varphi) = mg \cdot \sin(\varphi)$$

Mit Hilfe des 2. Newton'schen Axioms (siehe Gleichung 1.11) kann aus der Gesamtkraft eine Beschleunigung berechnet werden.

$$\begin{aligned} F &= ma \\ mg \cdot \sin(\varphi) &= ma \\ a &= g \cdot \sin(\varphi) \end{aligned}$$

Allerdings greift die Hangabtriebskraft am Mittelpunkt der Kugel an, sodass das Drehmoment der Kugel gleich Null ist (da  $r = 0$ ), was bedeutet, dass die Kugel nicht rollen würde, sondern einfach die Ebene hinunter gleiten würde.

Im nächsten Schritt wird angenommen die Ebene wäre doch nicht reibungsfrei, sondern würde die Reibungskraft  $F_{RR}$  (siehe Gleichung 1.16) aufweisen. Somit wirken auf die Kugel sowohl die Hangabtriebskraft, als auch die Reibungskraft und da die Reibungskraft genau entgegen der Bewegungsrichtung (entgegen der Hangabtriebskraft) zeigt, ergibt sich für die Gesamtkraft, die auf die Kugel wirkt nun

$$F_{ges} = F_H - F_{RR}$$

Die wirkende Reibungskraft greift allerdings direkt am Berührungspunkt zwischen Ebene und Kugel an, sodass sie auf einen Hebel der Länge  $r$  wirkt. Dementsprechend kann sofort ein Drehmoment  $M$  bestimmt werden und nach Gleichung 1.40 kann das entstehende Drehmoment auch über das Trägheitsmoment und der Winkelbeschleunigung ausgedrückt werden:

$$M = F_{RR} \cdot r = J \cdot \alpha$$

$$F_{RR} = \frac{J\alpha}{r}$$

Demnach kann die Gesamtkraft, die auf die Kugel wirkt so berechnet werden:

$$F_{ges} = mg \cdot \sin(\varphi) - \frac{J\alpha}{r}$$

$$ma = mg \cdot \sin(\varphi) - \frac{J\alpha}{r}$$

$$a = g \cdot \sin(\varphi) - \frac{J\alpha}{mr}$$

Das Problem ist nun, dass in dieser Gleichung noch die Winkelbeschleunigung als Unbekannte vorkommt. Da aber in dieser Gleichung eine betragsmäßige Betrachtung der Winkelbeschleunigung genügt, kann diese über Gleichung 1.31 in eine translatorische Beschleunigung umgerechnet werden:

$$a = g \cdot \sin(\varphi) - \frac{J \left(\frac{a}{r}\right)}{mr} = g \cdot \sin(\varphi) - \frac{Ja}{mr^2}$$

$$a + \frac{Ja}{mr^2} = g \cdot \sin(\varphi)$$

$$a \left(1 + \frac{J}{mr^2}\right) = g \cdot \sin(\varphi)$$

$$a = \frac{g \cdot \sin(\varphi)}{1 + \frac{J}{mr^2}}$$

## 1 Mechanik

Da das Trägheitsmoment über Gleichung 1.37 ganz einfach aus Massenverteilung und Radius berechnet werden kann und diese beiden Größen bekannt sind, kann die Beschleunigung, welche die Kugel die Ebene hinunter beschleunigt, mit obiger Gleichung ohne Probleme berechnet werden.

Nun soll aber besagte Kugel nicht einfach in Ruhe rollen gelassen werden, sondern auch noch an der oberen Kante mit einer weiteren Reibungskraft  $F_R$  gebremst werden. Da diese Kraft ebenfalls abseits des Massenmittelpunktes, bzw. abseits der Drehachse der Kugel angreift, erzeugt sie ebenfalls ein Drehmoment. Da  $F_R$  genau gegenüber von  $F_{RR}$  angreift, hat das durch  $F_R$  hervorgerufene Drehmoment genau den negativen Radius  $-r$  als Abstand zur Drehachse, womit es dem Drehmoment, welches durch die Reibung mit der Ebene erzeugt wird, genau gegenüber gesetzt ist.

Das Gesamtdrehmoment kann dann einfach über die Differenz der beiden Drehmomente berechnet werden:

$$\begin{aligned}M_{ges} &= F_{RR} \cdot r + F_R \cdot (-r) = r(F_{RR} - F_R) = J\alpha \\F_{RR} - F_R &= \frac{J\alpha}{r} = \frac{J\left(\frac{a}{r}\right)}{r} = \frac{Ja}{r^2} \\F_{RR} &= \frac{Ja}{r^2} + F_R\end{aligned}$$

Da aber beide Reibungskräfte entgegen der Hangabtriebskraft wirken, berechnet sich diese wie folgt:

$$F_{ges} = F_H - F_{RR} - F_R$$

Unter Anwendung des zweiten Newton'schen Axioms und Ersetzen von  $F_{RR}$  durch den Zusammenhang, der aus dem Gesamtdrehmoment hervor geht, ergibt sich dann

$$\begin{aligned}ma &= F_H - \left(\frac{Ja}{r^2} + F_R\right) - F_R = F_H - 2F_R - \frac{Ja}{r^2} \\&= mg \cdot \sin(\varphi) - 2F_R - \frac{Ja}{r^2} \\a &= g \cdot \sin(\varphi) - \frac{2F_R}{m} - \frac{Ja}{mr^2} \\a \left(1 + \frac{J}{mr^2}\right) &= g \cdot \sin(\varphi) - \frac{2F_R}{m} \\a &= \frac{g \cdot \sin(\varphi) - \frac{2F_R}{m}}{1 + \frac{J}{mr^2}}\end{aligned}$$

### 1.3.8 Der Trägheitstensor

Dass das Trägheitsmoment von der Drehachse abhängt wurde bereits bei der Einführung des Satzes von Steiner klar. Allerdings hängt das Trägheitsmoment nicht nur davon ab, ob die Drehachse durch den Schwerpunkt des Körpers geht oder nicht, sondern auch in welcher Orientierung die Drehachse zum Körper steht (auch wenn sie in jedem Fall durch den Schwerpunkt geht).

Wenn sich nochmals vor Augen geführt wird, dass das Trägheitsmoment von der Massenverteilung abhängt ist es auch nicht weiter verwunderlich, denn diese ändert sich eben mit der Ausrichtung des Körpers.

Um das Trägheitsmoment dennoch für alle möglichen Drehachsen beschreiben zu können gibt es den sogenannten **Trägheitstensor**  $\hat{j}$ . Bei einem Tensor im Allgemeinen handelt es sich um eine Beschreibung einer Größe, die unabhängig von der verwendeten Basis (in diesem Fall also unabhängig von der Ausrichtung) ist und somit eine allgemeine Beschreibung der entsprechenden Größe darstellt. Mit Hilfe eines Tensors kann man dann den speziellen Wert für die momentane Situation berechnen. Im Falle des Trägheitstensors handelt es sich um eine 3x3 Matrix, welche die Trägheitsmomente bei Drehung um die Hauptachsen enthält (Also den Trägheitsmomenten bei Drehung um die x-, y- oder z-Achse eines kartesischen Koordinatensystems dessen Ursprung im Schwerpunkt des Körpers liegt).

$$\hat{j} = \begin{pmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix} \quad (1.45)$$

### 1.3.9 Rotation um die Hauptträgheitsachsen

Für einen beliebigen Körper können drei Hauptdrehachsen festgelegt werden, die durch den Massenschwerpunkt des Körpers gehen. Die erste Hauptträgheitsachse (I) ist diejenige, bei der der Körper das maximal mögliche Trägheitsmoment besitzt. Die nächste Achse ist genau das Gegenteil. Sie stellt diejenige Drehachse dar, bei der der Körper das minimale Trägheitsmoment besitzt (III) und die letzte Achse ist senkrecht auf den ersten beiden um die Achsen zu einem kartesischen Koordinatensystem zu erweitern (II)-

Da diese Drehachsen über das Trägheitsmoment definiert sind, werden sie auch als **Hauptträgheitsachsen** bezeichnet.

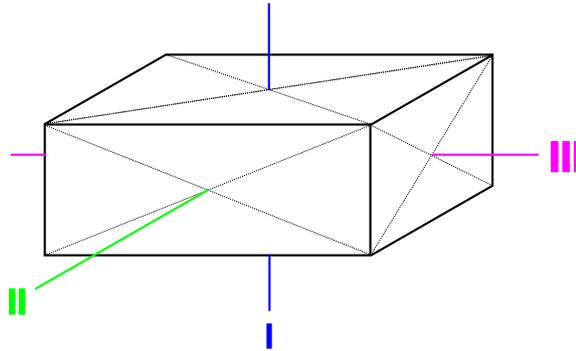


Abbildung 1.13: Hauptdrehachsen eines Quaders

Außerdem können Aussagen über die Stabilität der Rotation anhand der gewählten Drehachse gemacht werden.

#### Rotationsstabilität

Die Rotation eines Körpers ist **stabil**, wenn er um seine Hauptachse des größten Trägheitsmoments rotiert. Rotiert er um die Achse seines geringsten Trägheitsmoments, so ist die Rotation **labil**, was bedeutet, dass kleine Störungen ausreichen um ein Kippen der Drehachse zu bewirken. Rotation um die letzte Hauptachse sind **instabil**, was zu einem Torkeln des Körpers führt und - wenn die Drehachse nicht erzwungen wird - zu einem schnellen Kippen der Drehachse.

Jede Rotation strebt danach ihren Drehimpuls parallel zur Hauptträgheitsachse des größten Trägheitsmoments auszurichten. Das führt dazu dass bei Rotationen, die nicht um die Hauptträgheitsachse erfolgen, entweder die Drehachse kippt (bei labiler Rotation erst nach äußerer Störung) oder aber bei fester Drehachse **Unwucht** auftritt. Dazu sein angemerkt, dass eine Drehachse, die nicht durch den Massenschwerpunkt verläuft, immer kippt, bzw. Unwucht aufweist.

### 1.3.10 Kreisel, Präzession und Nutation

Allgemein wird als **Kreisel** jeder rotierende Körper bezeichnet.

## Präzession

»Die **Präzession** bezeichnet die Richtungsänderung, die die Rotationsachse eines rotierenden Körpers (Kreisel) ausführt, wenn eine äußere Kraft ein Drehmoment senkrecht zu dieser Achse ausübt.«[10]

Ein sehr bekanntes Beispiel dafür ist ein Fahrradrad, welches auf einer kleinen Achse steckt und diese an nur einer Seite mit einem Faden an der Decke befestigt ist. Wird dieses nun so ausgerichtet, dass das Rad ganz normal da steht und nicht über Kopf von der Decke baumelt, kann dieses in Rotation versetzt werden und anschließend los gelassen werden. Entgegen der Erwartung klappt dieses Rad dann nicht einfach nach unten, sondern hält seine Ausrichtung gegenüber dem Boden und beginnt sich langsam im Kreis zu drehen.

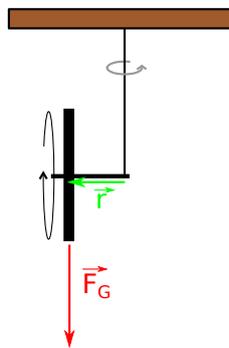


Abbildung 1.14: Skizze zur Präzession eines sich drehenden Fahrradrades

Durch die Eigendrehung des Rads besitzt es einen Drehimpuls, der in Abb. 1.14 nach links zeigt. Wird das Rad nun los gelassen, sodass es nur noch an der rechten Seite an dem Faden hängt, so wird der Befestigungspunkt des Fadens zum Drehpunkt einer neuen Drehung, nämlich des Nach-Unten-Kippens des Rads, welche durch die Schwerkraft des Rads verursacht wird. Somit wirkt also ein Drehmoment  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_G$ , welches in Abb. 1.14 aus der Bildebene hinaus (auf den Betrachter zu) zeigt. Somit steht es senkrecht auf dem Drehimpuls des Rads.

Wenn sich nun an die Definition des Drehmoments im Bezug auf den Drehimpuls (siehe 1.34) erinnert wird, so ist ja das Drehmoment nichts anderes als die Änderung des Drehimpulses. Der "neue" Drehimpuls nach der Änderung (im Zweifel in infinitesimalen Schritten) ist kann durch simple Vektoraddition des "alten" Drehimpulses und dem wirkenden Drehmoment. Da der Drehimpuls seinen Ursprung im Drehpunkt hat, wird er soweit in Richtung des Drehmoments rotiert, bis beide Richtungen überein stimmen. Steht das Drehmoment nicht senkrecht

auf dem Drehimpuls, so ändern sich nicht nur dessen "Richtungskomponenten", sondern auch seine "Betragskomponenten", sodass der Drehimpuls also verringert wird (Extrembeispiel: Abbremsen einer Drehung - hier ist das Drehmoment genau antiparallel zum Drehimpuls, sodass nur dessen Betrag verringert nicht aber sein Richtung verändert wird).

Das bedeutet also, dass sich durch das wirkende Drehmoment der Drehimpuls des Rads ändert. Da aber der Drehimpuls stets die Drehachse des Objektes repräsentiert (folgt aus der Definition des Drehimpulses (siehe 1.35)) ist das gleichbedeutend mit einer Änderung der Rotationsachse des Rads. Da sich der Drehimpuls also in der Ebene dreht, dreht sich auch die Drehachse des Objektes anstatt einfach nach unten zu kippen.

Dadurch dass sich das Rad gedreht hat, wirkt aber auch das von der Gewichtskraft erzeugte Drehmoment wieder in eine leicht andere Richtung (ebenfalls einfach in der Ebene um den selben Betrag wie der Drehimpuls rotiert), sodass der Drehimpuls immer weiter in Rotation gehalten wird und dementsprechend das Rad eine Kreiselbewegung um die Vertikale vollführt (siehe Abb. 1.14).

Zu guter Letzt nochmal zurück zu der Situation, dass sich das Rad zum Zeitpunkt des Loslassens nicht dreht. Warum präzediert das Rad dann nicht auch?

Das liegt schlicht und einfach daran, dass es dann zum Zeitpunkt des Loslassens noch keinen Drehimpuls besitzt, sodass der Drehimpuls sofort in die Richtung des Drehmoments (also in 1.14 aus der Bildebene heraus auf den Beobachter zu) und somit zeigt die Drehachse ebenfalls sofort in Richtung des Drehmoments. So, it erfolgt keine Drehung der Drehachse, sodass auch das durch die Schwerkraft verursachte Drehmoment nicht dreht sondern nach wie vor in die selbe Richtung wirkt, sodass das Rad letztendlich einfach nach unten kippt.

Die Präzessionsfrequenz  $\omega_p$  ist abhängig von dem erzeugten Drehmoment  $M$ , sowie dem vorherigen Drehimpuls  $L$  des Körpers.

$$\omega_p = \frac{M}{L} \quad (1.46)$$

### Nutation

Bei der **Nutation** handelt es sich um eine Kreiselbewegung der Drehachse eines Körpers. Anstatt also einer Rotation des Körpers um seine Drehachse, wie es sich gehört, kreiselt hier die Drehachse selbst während der Körper weiterhin um die

Drehachse rotiert. Die Nutation könnte also gewissermaßen als eine “Kreiselbewegung in einer Kreiselbewegung” beschrieben werden. Dabei entscheidend ist, dass der Drehimpuls, der bisher immer der Drehachse entsprach, in diesem Fall nicht mit der Drehachse rotiert, sondern nach wie vor konstant seine Drehung vollführt, welche dann z.B. eine Präzession verursacht. Eine Nutation wie in Abbildung 1.15

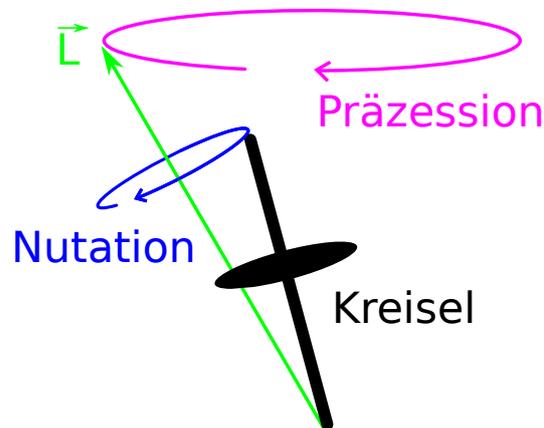


Abbildung 1.15: Skizze zu einer Nutation während einer Präzession eines Kreisels

gezeigt, kann dadurch erzeugt werden, dass sich ein Kreisel in einer Präzessionsbewegung befindet (weil sein Schwerpunkt nicht über dem Standpunkt ist und die Gewichtskraft somit ein Drehmoment erzeugt). In diesem Zustand wäre die Achse des Kreisels noch die selbe, wie der Drehimpuls  $\vec{L}$ . Wenn der Kreisel an seiner Spitze nun aber einen kleinen Kraftstoß erfährt (z.B. ein Anstupsen mit dem Finger), so wird Achse des Kreisels durch das wirkende Drehmoment verschoben, wodurch dann auch die Nutationsbewegung erzeugt wird.

### 1.3.11 Corioliskraft

Bei der **Corioliskraft** handelt es sich um eine Scheinkraft ähnlich zu den bereits bekannten Trägheitskräften. So wie die Trägheitskräfte nur innerhalb eines beschleunigten Systems existieren, existiert eine Corioliskraft **innerhalb** eines rotierenden Systems. Sie bewirkt eine scheinbare Änderung der Bewegungsrichtung eines Körpers, der seinen Abstand zur Drehachse ändert, sodass der Anschein erweckt wird, der Körper würde sich in einer gebogenen Bahn (verursacht durch die Corioliskraft) fort bewegen, obwohl er sich eigentlich auf gerader Bahn bewegt (von außerhalb des rotierenden Systems betrachtet). Siehe dazu Abbildung 1.16.

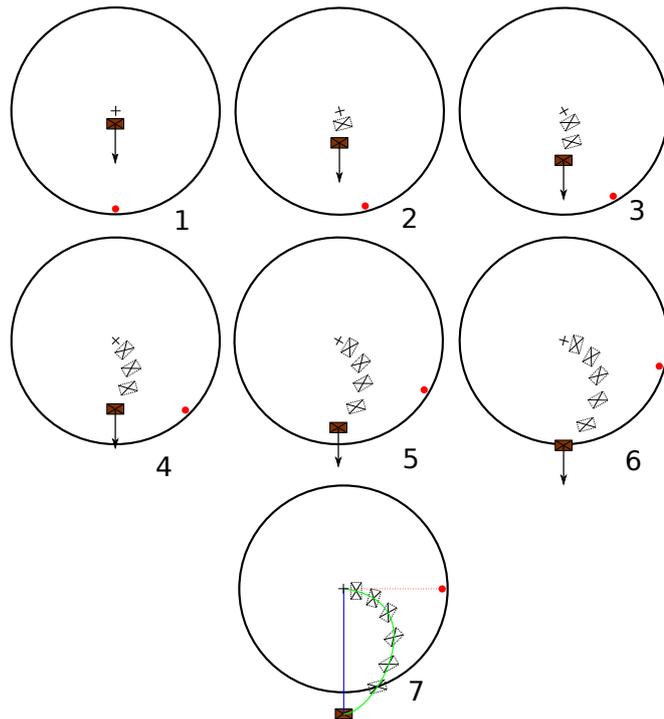


Abbildung 1.16: Skizze zur Corioliskraft. Wie in Bild 7 zu erkennen ist, hat sich der Körper die ganze Zeit auf einer geraden Bahn (blau) bewegt, allerdings scheint es für einen Beobachter im Zentrum der Rotation so, als hätte sich der Körper auf einer gebogenen Bahn (grün) bewegt.

Die Corioliskraft beruht also im Prinzip darauf, dass eine Bewegung einen Start- und einen Endpunkt besitzt. Wird allerdings während der Bewegung des Körpers der Endpunkt rotiert (weil sich der Beobachter in einem rotierenden System befindet, sodass der Bezugspunkt (rot) zwar immer "gerade aus" ist aber immer andere Koordinaten hat), so ändert der Körper dadurch seine Bewegung natürlich nicht. Allerdings scheint es dadurch so, als würde der Körper von seiner Bewegungsbahn abweichen und eine gebogene Bahn einschlagen. Da aber ein Körper von sich aus seinen Bewegungszustand nicht ändert, muss dafür eine Beschleunigung verantwortlich sein (aus Sicht eines Beobachters im inneren des rotierenden Systems), die **Coriolisbeschleunigung**  $a_C$  genannt wird.

Dieser Effekt nimmt zu, je schneller sich das Bezugssystem dreht, dh je größer seine Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  ist und je geringer die Geschwindigkeit  $v$  des Körpers ist. Genauer genommen hängt der Effekt von der Bahngeschwindigkeit  $v'$  des Körpers

ab, die er im Bezugssystem in die anfänglich Richtung hat.

$$\vec{v}' = \vec{v} - \omega \times \vec{r}$$

Mit Hilfe dieser “relativen Bahngeschwindigkeit” kann nun die scheinbare Beschleunigung des Körpers berechnet werden:

$$\vec{a}_c = 2[\vec{v}' \times \vec{\omega}] \quad (1.47)$$

Unter Anwendung der Grundgleichung der Mechanik (siehe 1.11) ergibt sich die Corioliskraft dann als

$$\vec{F}_C = m \cdot 2[\vec{v}' \times \vec{\omega}] \quad (1.48)$$

## 1.4 Potential und Kraftfeld

»In der Physik beschreibt ein Feld die räumliche Verteilung einer physikalischen Größe. Dabei kann es sich um ein Skalarfeld handeln, wie z. B. das Gravitationspotential oder das elektrostatische Potential, oder um ein Vektorfeld, wie z.B. das Gravitationsfeld oder das elektrische Feld. Der Wert eines Feldes an einem bestimmten Ort wird in manchen Fällen Feldstärke genannt.«[11]

Etwas spezieller kann ein solches Feld natürlich auch die Verteilung einer Kraft beschreiben (was dann ein vektorielles Feld wäre). Ein solches Feld wird dann **Kraftfeld** genannt.

Die geleistete Arbeit bei der Bewegung eines Probekörpers durch ein Kraftfeld kann über ein Integral beschrieben werden.

$$W = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F}(\vec{r}) ds \quad (1.49)$$

Die Bewegung eines Körpers, die am Ende wieder am Ausgangspunkt ankommt, wird über sogenannte Kreis- oder Wegintegrale  $\oint$  beschrieben. Wenn für eine solche Bewegung  $\oint \vec{F}(\vec{r}) ds = 0$  gilt, so wird das dazugehörige Kraftfeld als **konservatives Kraftfeld** bezeichnet.

»Das **Potential**  $\Phi$  ist in der Physik die Fähigkeit eines konservativen Kraftfeldes, eine Arbeit zu verrichten. Es beschreibt die Wirkung eines konservativen Feldes auf Massen oder Ladungen unabhängig von deren Größe und Vorzeichen selbst. Damit

wird zugleich eine Rückwirkung des Probekörpers prinzipiell ausgeschlossen, kann aber auch gesondert berücksichtigt werden.«[12]

Die **potentielle Energie**  $E_{pot}$  kann im Prinzip als diejenige Energie angesehen werden, die auf den Körper in Form von Arbeit übertragen wurde, als er auf die momentane Position im Feld bewegt wurde. Somit ist die potentielle Energie im Gegensatz zum Potential eine Eigenschaft des Objektes (z.B. Ladung oder Masse), welches sich im Feld befindet und nicht des Feldes selbst.

Allgemein kann die potentielle Energie mit Hilfe des Potentials an dem entsprechenden Ort  $\Phi(\vec{r})$  und der entsprechenden physikalischen Eigenschaft  $X$ , auf die die Kraft wirkt, berechnet werden.

$$E_{pot} = X \cdot \Phi(\vec{r}) \quad (1.50)$$

Im Fall eines Gravitationsfeldes, in welchem die Kraft auf eine Masse  $m$  wirkt, kann also die potentielle Energie durch Ersetzen von  $X$  mit der Masse  $m$  in Gleichung 1.50 berechnet werden.

$$E_{pot} = m \cdot \Phi(\vec{r})$$

Eine potentielle Energie wird aber auch sehr häufig relativ zu einem frei gewählten Nullpunkt angegeben. In diesem Fall beschreibt also die potentielle Energie nur die in Form von Arbeit übertragene Energie bei der Bewegung vom Nullpunkt zur aktuellen Position und kann demnach auch als Differenz der beiden "absoluten potentiellen Energien" beschrieben werden:

$$E_{pot_{relativ}} = E_{pot_{Objekt}} - E_{pot_{Referenz}} = \int_{Referenz}^{Objekt} \vec{F}(\vec{r}) ds$$

Wenn Gleichung 1.49 umgekehrt wird, so kann die wirkende Kraft als totales Differential der Arbeit nach dem Ort berechnet werden. Da aber die Arbeit in der potentiellen Energie steckt, kann die Kraft auch aus ihr berechnet werden. Da aber der Ort eine mehrdimensionale Größe ist (im Normalfall 3-dimensional) ist das totale Differential über das Produkt aus dem Gradientenvektor und der potentiellen Energie gegeben.

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} \cdot E_{pot} \quad (1.51)$$

Das Minus kommt daher, dass die Kraft immer in Richtung der geringeren potentiellen Energie zeigt (Es wird stets der energieärmere Zustand angestrebt).

## 1.5 Mechanik deformierbarer Körper

Bisher wurden nur Massenpunkte oder starre Körper betrachtet, aber das stellt natürlich eine starke Idealisierung der Wirklichkeit dar. Dort haben nämlich alle Körper ein endliches Volumen und aufgrund der Tatsache, dass sie aus Atomen aufgebaut sind, sind sie auch verformbar. Dabei hängt es natürlich davon ab, wie stark die intermolekularen Wechselwirkungen sind und in was für einem Aggregatzustand sich die Materie befindet.

### 1.5.1 Festkörper

Da Festkörper sehr dicht gepackt sind und sich die Atome nicht von ihrem Platz bewegen können, sind sie nur sehr geringfügig deformierbar, bzw. die aufzuwendende Kraft dafür ist extrem hoch.

#### Spannungen

Wenn eine Kraft auf einen Festkörper wirkt, so kann er nicht einfach seine Atome “umlagern”, um der Kraft “aus dem Weg zu gehen”. Deshalb verursacht eine auf einen Festkörper wirkende Kraft eine Spannung. Dabei unterscheidet man unterschiedliche Spannungstypen, abhängig davon wie und wo die Kraft angreift.

Greift die Kraft senkrecht an einer Fläche des Körpers an, so wird die dazugehörige Spannung als **Normalspannung**  $\sigma$  bezeichnet. Sie berechnet sich aus der Normalkraft  $F_N$  und der angegriffenen Fläche  $A$  des Körpers. Eine Normalspannung führt zu einer Streckung des Körpers.

$$\sigma = \frac{F_N}{A} \quad (1.52)$$

Greift die Kraft gleich stark von allen Seiten an dem Körper an, so erzeugt sie einen **Druck**  $p$ , der zu einer Kompression des Körpers führt.

$$p = \frac{F}{A} \quad (1.53)$$

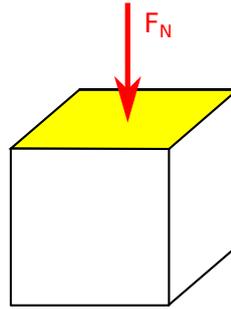


Abbildung 1.17: Skizze zur Normalspannung

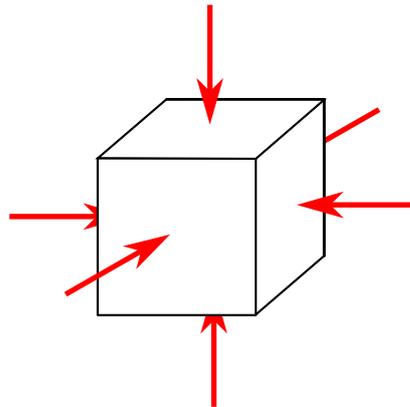


Abbildung 1.18: Skizze zum Druck

Greift die Kraft tangential an einer Seite des Körpers an, so erzeugt sie eine **Tangentialspannung** (auch: Schub- oder Scherspannung)  $\tau$ , die zu einer Scherung des Körpers führt. Sie berechnet sich aus der Tangentialkraft  $F_T$  und der angegriffenen Fläche  $A$ .

$$\tau = \frac{F_T}{A} \quad (1.54)$$

Wenn zwei Kräfte an gegenüberliegenden Punkte eines Körpers angreifen, so erzeugen diese ein Drehmoment, was zu einer Verdrillung des Körpers führt. Diese Art von Spannung wird **Torsionsspannung** genannt.

Sind die entsprechenden Spannung hinreichend gering, so kann für jede dieser

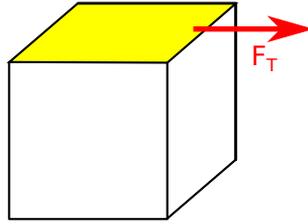


Abbildung 1.19: Skizze zur Tangentialspannung

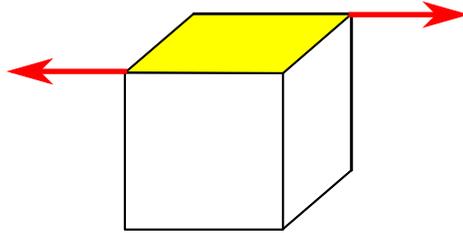


Abbildung 1.20: Skizze zur Torsionsspannung

Spannungsarten eine Art Hooksches Gesetz aufgestellt werden:

$$\begin{aligned}
 \text{Längenänderung: } & \frac{\Delta L}{L} = \frac{\sigma}{E} \\
 \text{Scherung: } & \frac{\Delta \gamma}{\gamma} = \frac{\tau}{G} \\
 \text{Kompression: } & \frac{\Delta V}{V} = \frac{p}{K}
 \end{aligned}
 \tag{1.55}$$

Die dabei auftretenden Konstanten  $E$ ,  $G$  und  $K$  sind stoffspezifisch und werden als Elastizitäts-, Schub- und Kompressionsmodul bezeichnet.

## 1.5.2 Flüssigkeiten und Gase

Aufgrund ihres molekularen Aufbaus sind Flüssigkeiten so gut wie inkompressibel (Die Atome sind ja schon sehr dicht beieinander), wohingegen Gas aufgrund der großen Abstände zwischen den Teilchen eine sehr hohe Kompressibilität aufweisen.

Die freie Beweglichkeit der Teilchen in Flüssigkeiten und Gasen sorgt dafür, dass eine auf das Gemisch wirkende Kraft einen Druck erzeugt, der überall in der Flüssigkeit, bzw. dem Gas gleich groß ist.

## 1 Mechanik

Die durch den Druck ausgeübte Kraft wirkt stets senkrecht auf die Wände des Gemisches, da alles Andere zu einer Verschiebung der Teilchen führen würde, wobei dann ebenfalls wieder eine senkrechte Kraft wirkt.

Diese Gleichverteilung des Druckes wird in der Technik z.B. in hydraulischen Pressen ausgenutzt, indem eine auf eine kleine Fläche  $A_1$  eine Kraft  $F_1$  ausgeübt wird. Auf der anderen Seite der Flüssigkeit verbreitert sich der Kolben hin zu einer deutlich größeren Fläche  $A_2$  und da der Druck überall gleich groß sein muss, kann die so "erzeugte" Kraft  $F_2$  berechnet werden.

$$\begin{aligned} p_1 &= p_2 \\ \frac{F_1}{A_1} &= \frac{F_2}{A_2} \\ F_2 &= \frac{F_1 \cdot A_2}{A_1} \end{aligned}$$

Da  $A_2 \gg A_1$  ist, ist auch  $F_2 \gg F_1$ .

Aus diesem Beispiel lässt sich auch das sogenannte **Hebelgesetz der Hydraulik** heraus schreiben:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{A_1}{A_2} \quad (1.56)$$

### Schweredruck in Flüssigkeiten

In einem mit einer Flüssigkeit gefüllten Zylinder nimmt der Druck bei steigender Flüssigkeitstiefe immer weiter zu, da auf den unteren Teil der Flüssigkeit stets der darüber liegende Flüssigkeitsanteil durch die Schwerkraft drückt. Somit nimmt der Druck einer Flüssigkeit mit zunehmender Tiefe zu. Dieser Druck wird auch **Schweredruck** genannt.

Dabei ist es vollkommen irrelevant, in was für einer Form die darüber liegende Flüssigkeit gezwängt wird. Der Schweredruck ist nur abhängig von der Tiefe.

Um den Schweredruck in Abhängigkeit von der Tiefe auszurechnen, wird die Flüssigkeitssäule in infinitesimal kleine Scheiben der Dicke  $dh$  und der Masse  $dm$  zerlegt. Der Gesamtdruck ist dann als Aufsummierung der Drücke der einzelnen Scheiben gegeben ( $\rho$  entspricht dabei der Dichte der Flüssigkeit, die in erster Näherung als

druckunabhängig beschrieben werden kann)

$$\begin{aligned} p(h) &= \int_0^h dp = \int_0^h \frac{dF}{A} = \int_0^h \frac{g \cdot dm}{A} = \int_0^h \frac{g \cdot \rho dV}{A} \\ &= \int_0^h g \rho dh \end{aligned}$$

Der Schweredruck in einer Flüssigkeit kann also folgendermaßen berechnet werden

$$p(h) = g\rho h \quad (1.57)$$

### Auftrieb in Flüssigkeiten

Wird ein Massestück in eine Flüssigkeit getaucht, so erscheint sie leichter, da sie mit geringerer Kraft nach unten zieht. Da aber die Gewichtskraft nicht plötzlich kleiner werden kann, muss es einen entgegen gesetzt gerichtete Kraft geben, die durch das Eintauchen in die Flüssigkeit erzeugt wird geben. Diese Kraft wird **Auftriebskraft**  $F_A$  genannt.

Diese Auftriebskraft ist dem Schweredruck der Flüssigkeit zuzuschreiben, da beim Eintauchen des Massestücks in die Flüssigkeit am oberen Ende des Massestücks ein geringerer Schweredruck herrscht, als am Unteren. Da der Druck senkrecht auf den Körper wirkt löschen sich sämtliche Drücke, die seitlich wirken gegenseitig aus, sodass nur die senkrechten Komponenten beachtet werden müssen. Durch den höheren Druck unten, erfährt also das Massestück eine Kraft, die es nach oben (also entgegen der Gewichtskraft) drückt.

Im Folgenden soll ein Quader mit der Seitenfläche  $A$  in einer Flüssigkeit der Dichte  $\rho$  betrachtet werden.

$$\begin{aligned} F_A &= F_{unten} - F_{oben} = \rho g h_{unten} \cdot A - \rho g h_{oben} \cdot A \\ &= \rho g A (h_{unten} - h_{oben}) = \rho \Delta h A \cdot g \\ &= \rho V_{verdrngt} \cdot g = m_{verdrngt} \cdot g \end{aligned}$$

Das bedeutet also, dass die Auftriebskraft stets den Betrag der Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit besitzt. Dieses Phänomen wird auch **Archimedisches Prinzip** genannt und ist unabhängig von der Form des eingetauchten Körpers, sodass stets gilt

$$F_A = m_{verdrngt} \cdot g \quad (1.58)$$

## Schweredruck und Auftrieb in Gasen

Im Gegensatz zu den Flüssigkeiten sind Gase sehr leicht zu komprimieren, sodass die Näherung einer druckunabhängigen Dichte, wie sie bei der Berechnung des Schweredrucks einer Flüssigkeit verwendet wurde, nicht mehr möglich ist.

Das bedeutet also, dass Gas, welches sich weiter unten in der Gassäule befindet durch Kompression eine höhere Dichte besitzt, als Gas, das weiter oben ist.

Da aber der Druck  $p$  des entsprechenden Gasbereiches stets proportional zu seiner Dichte  $\rho$  ist (bei Annahme einer konstanten Temperatur), kann folgender Zusammenhang gefunden werden:

$$\frac{p}{\rho} = \text{const.}$$

Das bedeutet, dass für eine beliebige Stelle der Gassäule das Verhältnis von Druck und Dichte die selbe sein muss, wie ganz oben an der Säule ( $p_0$  und  $\rho_0$ )

$$\begin{aligned} \frac{p(h)}{\rho(h)} &= \frac{p_0}{\rho_0} \\ \rho(h) &= \frac{\rho_0}{p_0} \cdot p(h) \end{aligned}$$

Die infinitesimale Änderung des Schweredrucks eines Gases kann analog zu dem einer Flüssigkeit berechnet werden

$$dp = -g \cdot \rho(h) dh$$

Das negative Vorzeichen kommt daher, dass  $dh$  nach unten geht und somit ein negatives Vorzeichen hat. Da aber ein Druck ein positives Vorzeichen benötigt, muss mit  $-1$  multipliziert werden.

Da nun ein Ausdruck für  $\rho(h)$  gefunden wurde, kann der Schweredruck in einer beliebigen Tiefen berechnet werden.

$$\begin{aligned} dp &= -g \cdot \rho dh = -g \cdot \frac{\rho_0}{p_0} \cdot p dh \\ \frac{1}{p} dp &= -g \cdot \frac{\rho_0}{p_0} dh \\ \int_{p_0}^{p(h)} \frac{1}{p} dp &= -g \cdot \frac{\rho_0}{p_0} \cdot \int_0^h dh \\ \ln \left( \frac{p(h)}{p_0} \right) &= -g \cdot \frac{\rho_0}{p_0} \cdot h \end{aligned}$$

Somit kann also der Schweredruck eines Gases berechnet werden durch

$$p(h) = \exp\left(-\frac{\rho_0}{p_0} \cdot gh\right) \cdot p_0 \quad (1.59)$$

Diese Gleichung wird auch **Barometrische Höhenformel** genannt.



# 2 Elektrodynamik

## 2.1 Strom, Spannung und Ladung

### 2.1.1 Strom und Ladung

Ein **elektrischer Strom**  $I$  ist eine im Mittel gerichtete Bewegung von Ladungsträgern. Dabei spielt es keine Rolle, ob es sich um positive (z.B. Kationen in Lösung) oder negative (z.B. Elektronen oder Anionen in Lösung) Ladungsträger handelt.

Somit kann er als die Ladungsmenge  $dQ$ , die pro Zeiteinheit  $dt$  beschrieben werden.

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (2.1)$$

Die Einheit des elektrischen Stromes ist das Ampère A

$$[I] = 1\text{A}$$

Ein elektrischer Strom hat dabei unter Anderem einen magnetischen (z.B. Erzeugen von Magnetfeldern), einen thermischen (z.B. Entstehung von Wärme) und einen chemischen (z.B. Elektrolyse) Effekt.

Die **elektrische Ladung**  $Q$  ist implizit durch die Definition des elektrischen Stromes definiert als

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I dt \quad (2.2)$$

Sie trägt die Einheit Coulomb, was allerdings keine SI-Einheit ist. Die SI-Einheit der elektrischen Ladung ist die Ampèresekunde.

$$Q = 1\text{C} = 1\text{As}$$

## 2 Elektrodynamik

Wichtig bei der elektrischen Ladung ist, dass sie nur ganzzahlige Vielfache der Elementarladung  $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{C}$  annehmen kann (abseits von Elementarteilchen, wie z.B. Quarks).

### Strommessung

Zur Messung des elektrischen Stroms werden die durch ihn erzeugten Eigenschaften ausgenutzt. Im Folgenden soll das grundlegende Prinzip einiger Vertreter erläutert werden.

- **Drehspulinstrument** Bei diesem Messgerät wird das von einem Strom erzeugte Magnetfeld zur Messung heran gezogen. Dazu wird eine stromdurchflossene Spule in ein Magnetfeld eines Permanentmagneten gehalten, sodass durch den fließenden Strom eine Wechselwirkung zwischen dem Magnetfeld und der Spule entsteht. Bei einem Drehspulinstrument ist diese Spule drehbar, sodass durch besagte Wechselwirkung eine Drehung der Spule hervorgerufen wird, welche dann mittels eines Zeigers visualisiert werden kann.

Diese Messmethode ist **abhängig von der Stromrichtung**, sodass sie ungeeignet für die Messung von Wechselströmen ist. Außerdem sind diese Instrumente in der Regel recht empfindlich, sodass sie für sehr hohe Ströme ebenfalls ungeeignet sind.

- **Weicheiseninstrument** Auch dieses Messgerät nutzt das erzeugte Magnetfeld des elektrischen Stroms aus, um die Stromstärke zu bestimmen. Allerdings werden bei diesem Instrument zwei reine Eisenstücke (leicht magnetisierbar) in einer stromdurchflossenen Spule so platziert, dass sich einer der beiden von dem Anderen weg bewegen kann. Durch das erzeugte Magnetfeld in der Spule werden beide Eisenstücke gleichsinnig magnetisiert, sodass sie sich abstoßen. Dadurch wird das bewegliche Eisenstück etwas von dem Anderen weg gedrückt, was dann wiederum visualisiert (Zeiger) und für eine Quantifizierung der Stromstärke verwendet werden kann.

Diese Messmethode ist somit **unabhängig von der Stromrichtung** und kann deswegen auch für das Messen von Wechselströme heran gezogen werden.

- **Hitzdrahtinstrument** Dieses Messinstrument nutzt den thermischen Effekt eines elektrischen Stroms. Ein stromdurchflossener Draht, der horizontal

aufgespannt ist, dehnt sich bei Stromfluss durch die dadurch erzeugte Wärme aus, was sich in einem vermehrten Durchhängen des Drahtes bemerkbar macht. Mittels einer geeigneten Konstruktion kann auch dieses Durchhängen auf einen Zeiger übertragen werden, sodass durch die Ausdehnung des Drahtes die Stromstärke gemessen werden kann.

Diese Methode ist ebenfalls unabhängig von der Stromrichtung, allerdings auch **sehr träge und ungenau** und darüber hinaus nur für hohe Ströme geeignet, da kleine Ströme nicht ausreichend Wärme erzeugen, um eine merkliche Ausdehnung des Drahtes zu bewirken.

Strommessgeräte werden im Allgemeinen durch folgende Schaltskizze repräsentiert:

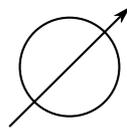


Abbildung 2.1: Schaltskizze eines Strommessgeräts

### 2.1.2 Spannung

Die **elektrische Spannung**  $U$  ist die Ursache des elektrischen Stroms. Sie beschreibt dabei die Potentialdifferenz zweier Pole.

Sie kommt dadurch zustande, dass sich gleichnamige Ladungen gegenseitig abstoßen. Besitzt ein Pol ein Potential, so besitzt er überwiegend gleichnamige Ladungsträger, die sich gegenseitig abstoßen. Wird diesen Ladungsträgern nun ein "Ausweg" angeboten (anschießen eines Kabels, welches zu einem niedrigeren/andersnamigen Potential führt), so werden sie durch die gegenseitige Abstoßung zur Bewegung angeregt, was dann als Strom messbar ist.

Der elektrische Strom fließt genau so lange, bis keine Potentialdifferenz mehr herrscht.

Die elektrische Spannung wird in Volt  $V$  gemessen, was die Energiemenge pro

## 2 Elektrodynamik

Ladungseinheit beschreibt.

$$[U] = 1 \text{ V} = 1 \frac{\text{J}}{\text{C}} = 1 \frac{\text{J}}{\text{As}}$$

### Spannungsmessung

Zur Messung der elektrischen Spannung gibt es wieder mehrere Möglichkeiten.

- **Elektrostatische Spannungsmessung** Bei dieser Art der Spannungsmessung wird ausgenutzt, dass sich gleichnamige Ladung gegenseitig abstößt. Dabei werden zwei nicht verbundenen Leiterplatten (Kondensatoren) über die zu messende Spannung gleichnamig aufgeladen und durch die nun herrschende Abstoßungskraft zwischen den Platten kann die Stärke der Spannung bestimmt werden.

Für diese Art der Messung sind allerdings **hohe Spannungen** nötig.

- **Stromdurchflossene Spannungsmessung** Bei dieser Art der Messung wird das Messgerät in den Stromkreis eingebaut und misst dann die Spannung bei fließendem Strom anhand eines bekannten Innenwiderstandes des Messgeräts. Ist der Innenwiderstand deutlich größer, als der Gesamtwiderstand im Stromkreis, so kann die anliegende Spannung näherungsweise über das Ohm'sche Gesetz berechnet werden.

In einer Schaltskizze wird ein elektrostatistischer Spannungsmesser wie folgt dargestellt (stromdurchflossene Spannungsmessgeräte werden wie ein Strommessgerät (siehe Abb. 2.1) dargestellt):



Abbildung 2.2: Schaltskizze eines elektrostatistischen Spannungsmessgeräts

### 2.1.3 Das Wassermodell

Einen elektrischen Stromkreis kann in einfacher Näherung gut als ein Wasserkreislauf visualisiert werden.

Dazu werden sich zwei Behälter vorgestellt, die eine unterschiedliche Höhe haben. In dem höheren der beiden ist hierbei das Wasser gefüllt. Da das Wasser in dieser Visualisierung für die Elektronen steht, stellt also der höhere Behälter den Minuspol dar (Wasser-, bzw. Elektronenüberschuss) und der Untere stellt den Pluspol dar (Wasser-, bzw. Elektronenmangel).

Die Höhendifferenz der oberen Wasserkanten beider Behälter stellt dabei die elektrische Spannung dar.

Werden nun beide Behälter durch einen Schlauch (Kabel) verbunden, wo fließt ein Strom vom Ort höheren Potentials (oberer Behälter) zum Ort niedrigeren Potentials (unterer Behälter).

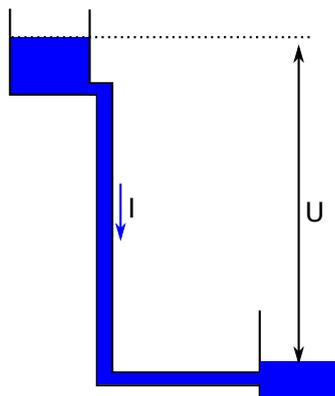


Abbildung 2.3: Skizze zum Wassermodell eines Stromkreises

## 2.2 Der elektrische Widerstand

Der **elektrische Widerstand**  $R$  ist das Verhältnis der angelegten Spannung zu dem dadurch erzeugten elektrischen Strom.

$$R = \frac{U}{I} \quad (2.3)$$

Je größer also der Widerstand in einem Stromkreis ist, desto geringer ist der durch eine konstante Spannung verursachte Strom.

Gemessen wird der elektrische Widerstand in Ohm  $\Omega$

$$[R] = 1 \Omega = 1 \frac{\text{V}}{\text{A}}$$

## 2 Elektrodynamik

Auf Teilchenebene kann der Widerstand durch Kollisionen der fließenden Elektronen mit den stationären Atomrümpfen erklärt werden, sodass die Elektronen immer wieder abgebremst werden, was sich dann im elektrischen Widerstand bemerkbar macht.

Ist der Widerstand für verschiedene Spannungen und Stromstärken in einem Leiter konstant, so wird er als **ohm'scher Leiter** bezeichnet. Da der Widerstand der Proportionalitätsfaktor zwischen Spannung und Strom ist, bedeutet das, dass in einem ohm'schen Leiter die Spannung und die Stromstärke stets proportional zueinander sind.

Bei Messungen des elektrischen Widerstands wird eine Proportionalität zwischen dem Widerstand und der Länge  $L$   $R \propto L$  und zum Kehrwert der Querschnittsfläche  $A$  des Leiters  $R \propto \frac{1}{A}$ , sodass sich insgesamt ergibt

$$R \propto \frac{L}{A}$$

Die durch diese Proportionalität eingeführte Proportionalitätskonstante wird **spezifischer Widerstand**  $\rho$  genannt.

$$R = \rho \cdot \frac{L}{A}$$

Der spezifische Widerstand gibt somit einen Widerstand unabhängig von der Leiterlänge und seiner Querschnittsfläche an, sodass er als eine Materialkonstante angesehen werden kann.

$$\rho = R \cdot \frac{A}{L} \quad (2.4)$$

Ein elektrischer Widerstand wird im Allgemeinen durch folgenden Schaltskizze dargestellt:

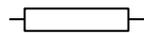


Abbildung 2.4: Schaltskizze eines elektrischen Widerstandes

### Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstands

Durch Messungen ergibt sich auch eine Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes, der aber nicht proportional ist, weswegen die Angabe eines Widerstandes immer nur mit Bezug auf eine bestimmte Temperatur erfolgen kann.

Allerdings können Leiter nach der Temperaturabhängigkeit ihres Widerstands in drei Gruppen eingeteilt werden.

- **Leiter** Bei einem Leiter nimmt der Widerstand mit steigender Temperatur zu.
- **Halbleiter** Bei einem Halbleiter nimmt der Widerstand mit steigender Temperatur ab.
- **Supraleiter** Bei einem Supraleiter verhält sich der Widerstand prinzipiell so, wie bei einem Leiter, allerdings fällt er ab einer ausreichende geringen Temperatur schlagartig auf 0 ab.

## 2.3 Gleichstromkreise

Ein **Gleichstromkreis** ist ein Stromkreis, in dem der Strom stets in die selbe Richtung fließt (und nicht wie bei einem Wechselstromkreis permanent seine Richtung ändert).

In einem solchen System gilt es verschiedene Komponenten voneinander zu unterscheiden:

- **Zweig**: Ein Zweig ist ein beliebiger Teil in einem Stromkreis, durch den der selbe Strom fließt.
- **Knoten**: Ein Knoten beschreibt eine Verbindung mehrerer Leitungen des selben Potentials (mit der selben Spannung).
- **Masche**: Eine Masche ist ein geschlossener Kreis (innerhalb des Stromkreises), der über beliebige Schaltelemente gehen kann.

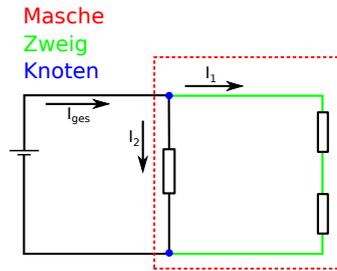


Abbildung 2.5: Skizze der in einem Gleichstromkreis vorkommenden Elemente

## 2.3.1 Die Kirchhoff'schen Sätze

### 1. Kirchhoff'scher Satz - Die Knotenregel

Die Knotenregel beschreibt die Tatsache, dass ein Knoten niemals Ladung erzeugen oder verschwinden lassen kann. Demnach muss also jede, die in den Knoten fließt auch wieder aus dem Knoten heraus fließen, bzw. es kann nur so viel Ladung aus einem Knoten heraus fließen, wie auch in ihn hinein fließt.

Da das Maß für fließende Ladung der elektrische Strom ist, kann die Knotenregel auch so formuliert werden, dass immer gleich viel Strom aus einem Knoten heraus fließt, wie in ihn hinein fließt. Wenn nun die eingehenden Ströme mit einem positiven Vorzeichen und die Ausgehenden mit einem Positiven, so kann die Knotenregel mathematisch so beschrieben werden, dass die Summe aller Ströme an einem Knoten gleich Null ist (Einfließende und ausfließende Ströme heben sich gegenseitig auf).

$$\sum_k I_k = 0 \quad (2.5)$$

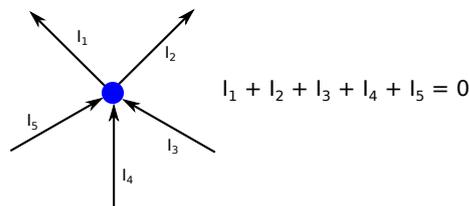


Abbildung 2.6: Skizze zur Anwendung der Knotenregel ( $I_1$  und  $I_2$  haben jeweils ein negatives Vorzeichen)

## 2. Kirchhoff'scher Satz - Die Maschenregel

Die Maschenregel beschreibt die Tatsache, dass in einer Masche keine Energie erzeugt werden kann. Da die Energie eines Stromkreises im Wesentlichen von der Spannung abhängt, bedeutet dies, dass in einer Masche keine Spannung erzeugt werden kann. Somit muss beim kompletten Durchlauf der Masche, also bei Wiederankunft am Ausgangspunkt, wieder die selbe Spannung herrschen, wie am Ausgangspunkt.

Mathematisch formuliert muss die Summe aller Spannungen (entgegengesetzte Spannungen haben entgegengesetzte Vorzeichen) innerhalb einer Masche gleich Null ergeben, da sonst bei einem Durchlauf der Masche eine neue Spannung erzeugt würde.

$$\sum_k U_k = 0 \quad (2.6)$$

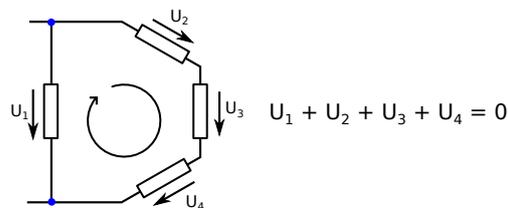


Abbildung 2.7: Skizze zur Anwendung der Maschenregel ( $U_1$  muss mit einem negativen Vorzeichen versehen werden, da sie entgegen der anderen Spannungen wirkt)

### 2.3.2 Verschaltung von Widerständen

Ein Zweig eines Stromkreises kann durch einen Ersatzwiderstand  $R_{ges}$  ersetzt werden, ohne dass sich der Stromfluss dadurch ändert. Allerdings berechnet sich dieser Ersatz- oder Gesamtwiderstand eines Zweiges unterschiedlich, je nachdem, wie die Widerstände in diesem Kreis miteinander verschalten sind.

- **Reihenschaltung** Bei einer Reihenschaltung ergibt sich der Gesamtwiderstand  $R_{ges}$  einfach aus der Summe aller Einzelwiderstände  $R_i$

$$R_{ges} = \sum_i R_i \quad (2.7)$$

## 2 Elektrodynamik

- **Parallelschaltung** Bei einer Parallelschaltung kann der reziproke Gesamtwiderstand  $\frac{1}{R_{ges}}$  durch die Summe aller reziproken Einzelwiderstände  $\frac{1}{R_i}$  berechnet werden.

$$\frac{1}{R_{ges}} = \sum_i \frac{1}{R_i} \quad (2.8)$$

Bei einer Kombination dieser Verschaltungen liegen zwangsläufig auch mehrere Zweige vor, sodass der Gesamtwiderstand des Gesamtzweiges durch Berechnung der Gesamtwiderstände der “Untierzweige” und anschließend entsprechende Zusammenrechnung dieser Widerstände (je nach Verschaltung der Zweige zueinander) erfolgen.

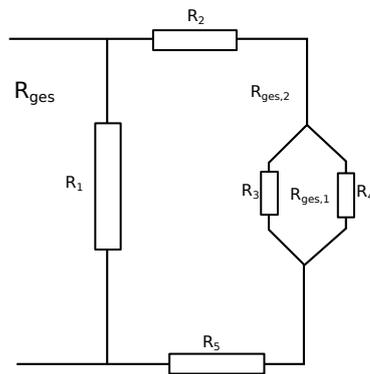


Abbildung 2.8: Beispiel zur Verschaltung von Widerständen

In der in Abbildung 2.8 gezeigten Schaltung würde sich der Gesamtwiderstand folgendermaßen berechnen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_{ges}} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_{ges,2}} \\ &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + R_{ges,1} + R_5} \\ &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)^{-1} + R_5} \end{aligned}$$

### 2.3.3 Der Spannungsteiler

Ein Spannungsteiler ist ein Schaltkreis, der eine Eingangsspannung  $U_{ges}$  in eine kleinere Spannung  $U_1$  und einer Restspannung aufteilen kann.

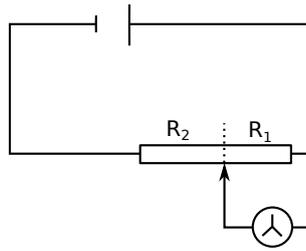


Abbildung 2.9: Schaltskizze eines einfachen Spannungsteilers

In dieser Schaltung steckt ein verstellbarer Widerstand mit dem Gesamtwiderstand  $R_{ges} = R_1 + R_2$ , wobei  $R_1$  und  $R_2$  jeweils die Teilwiderstände rechts und links der abgreifenden Leitung ist.

Die Teilspannung  $U_1$ , welche an dem Spannungsmessgerät gemessen wird, kann berechnet werden. Grundlage für diese Berechnung ist, dass es sich um einen elektrostatischen Spannungsmesser handelt, dh. der Stromkreis besteht aus nur einem Zweig. Somit muss die Stromstärke in ihm überall gleich sein. Die Stromstärke kann nach dem Ohm'schen Gesetz (siehe Gleichung 2.3) berechnet werden. Dabei muss der Strom, welcher mit der Teilspannung  $U_1$  und dem Teilwiderstand  $R_1$  berechnet wird gleich groß, wie der Gesamtstrom sein.

$$I = \frac{U_{ges}}{R_{ges}} = \frac{U_1}{R_1}$$

Somit kann die Teilspannung  $U_1$  in Abhängigkeit des entsprechenden Widerstandes  $R_1$  berechnet werden.

$$U_1 = U_{ges} \cdot \frac{R_1}{R_{ges}} \quad (2.9)$$

### 2.3.4 Wheatstone'sche Brückenschaltung

Mit der sogenannten Wheatstone'schen Brückenschaltung kann ein Unbekannter Widerstand bestimmt werden.

Die Schaltung an sich besteht dabei aus zwei parallelen Spannungsteilern, die in der Mitte mit einem Strommessgerät verbunden sind. Der Regelbare Widerstand wird nun so eingestellt, dass in beiden Teilzweigen jeweils der selbe Strom fließt und somit kein Strom vom einen Zweig in den anderen fließt. Das bedeutet, dass

## 2 Elektrodynamik

das Strommessgerät einen Strom von 0 A anzeigt. In diesem Zustand wird die Brückenschaltung ausgeglichen genannt.

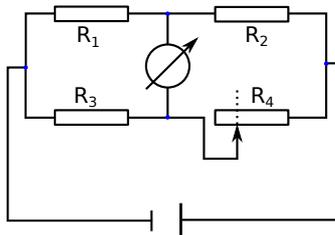


Abbildung 2.10: Schaltskizze einer Wheatstone-Brückenschaltung

Im ausgeglichenen Zustand muss also die Aufteilung der Spannung durch die beiden Spannungsteiler in beiden Zweigen identisch sein. Andernfalls würde es einen Ausgleichsstrom geben, den das Strommessgerät anzeigen würde. Durch Anwendung des Ohm'schen Gesetzes (siehe Gleichung 2.3) ergibt sich also

$$\begin{aligned}U_1 &= U_3 \\I_1 R_1 &= I_3 R_3\end{aligned}$$

und analog für den zweiten Teil der jeweiligen Spannungsteiler (Dabei ist zu beachten, dass innerhalb eines Spannungsteilers stets der selbe Strom fließt)

$$\begin{aligned}U_2 &= U_4 \\I_1 R_2 &= I_2 R_4\end{aligned}$$

Durch Teilen der beiden Gleichungen durcheinander ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{U_1}{U_3} &= \frac{U_2}{U_4} \\ \cancel{I_1} R_1 &= \cancel{I_3} R_3 \\ \cancel{I_1} R_2 &= \cancel{I_2} R_4 \\ \frac{R_1}{R_3} &= \frac{R_2}{R_4}\end{aligned}$$

Ist nun einer der Widerstände Unbekannt (z.B.  $R_1$ ), so kann er über diese Beziehung berechnet werden.

$$R_1 = \frac{R_2}{R_4} \cdot R_3 \quad (2.10)$$

Somit kann die Wheatstone-Brückenschaltung zur präzisen Bestimmung eines Widerstandes genutzt werden.

### 2.3.5 Einfluss des Innenwiderstandes von Messgeräten

Da Messgeräte nicht so gefertigt werden können, dass sie keinen Widerstand besitzen, muss sich mit der Frage auseinandergesetzt werden, wie dieser am besten bei dem jeweiligen Messgerät auszusehen hat.

Allgemein gilt, dass eine Änderung des Gesamtwiderstandes innerhalb eines Stromkreises stets auch eine Änderung der Eigenschaften (Strom- und Spannungsverteilung) zur Folge hat. Ziel muss also sein, den Gesamtwiderstand des Stromkreises durch Einbringen eines Messgerätes möglichst gering zu halten.

Da das Strommessgerät in den Stromkreis via Reihenschaltung eingebaut wird, wird auch sein Innenwiderstand in Reihe mit dem restlichen Stromkreis geschaltet. Nach Gleichung (2.7) ändert sich der Gesamtwiderstand des Stromkreises am wenigsten, wenn der Innenwiderstand des Strommessgerätes möglichst gering ist.

Das Spannungsmessgerät wird hingegen parallel geschaltet in den Stromkreis eingebracht und durch Gleichung (2.8) zeigt sich, dass es von Vorteil ist, wenn der Innenwiderstand des Messgerätes möglichst hoch ist. Dies macht auch Sinn, da ein großer Widerstand einen kleinen Strom bewirkt und da durch ein Spannungsmessgerät im Idealfall überhaupt kein Strom fließen sollte, ist ein sehr großer Widerstand auch hierfür von Vorteil.

## 2.4 Das elektrische Feld

Das **elektrische Feld**  $\vec{E}$  ist ein Vektorfeld (siehe Abschnitt 1.4), welches eine Kraft auf eine positive Probeladung  $q$  im Raum beschreibt (Für eine negative Probeladung kehrt sich einfach das Vorzeichen um).

Das bedeutet es gilt

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}$$

Somit muss das elektrische Feld folgendermaßen berechenbar sein

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \tag{2.11}$$

## 2 Elektrodynamik

Da sich das elektrische Feld stets auf eine positive Probeladung bezieht, verlaufen seine Feldlinien stets von Plus nach Minus (also die Richtung in die eine positive Probeladung gedrückt werden würde).

Bei den Feldlinien ist es wichtig, dass diese stets senkrecht auf den Oberflächen stehen, denen sie entspringen. Das bedeutet, dass sie stets senkrecht auf der Oberfläche des Pluspols starten und senkrecht auf der Oberfläche des Minuspols enden.

### 2.4.1 Das homogene elektrische Feld

In einem homogenen elektrischen Feld, ist das Feld an jedem Punkt genau gleich stark und gleich gerichtet. Bei einer Darstellung mittels Feldlinien wären also alle Feldlinien parallel und hätten den selben Abstand voneinander.

Ein solches homogenes Feld kann beispielsweise zwischen zwei parallelen Leiterplatten (Kondensator) gefunden werden.

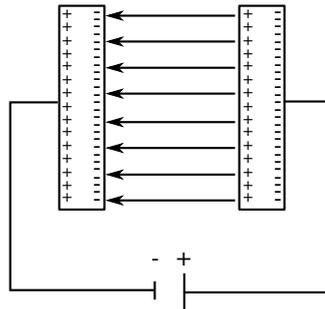


Abbildung 2.11: Ein homogenes elektrisches Feld innerhalb eines Koindensators

Bei Messungen fällt auf, dass dieses elektrische Feld proportional zu der angelegten Spannung  $U$  und dem reziproken Abstand der Platten  $\frac{1}{L}$ . Die Querschnittsfläche der Platten hat dabei aber keinen Einfluss auf die Stärke des elektrischen Feldes.

Außerdem ist die Stärke des elektrischen Feldes proportional zu der Ladungsmenge  $Q$  auf den entsprechenden Kondensatorplatten. Zusammen mit der Unabhängigkeit von der Querschnittsfläche bei konstanter Spannung, ergibt sich eine Proportiona-

lität zu der sogenannten **Ladungsdichte**  $\sigma$ .

$$|\vec{E}| \propto \frac{Q}{A} = \sigma$$

Somit kann das elektrische Feld auf zwei Arten beschrieben werden:

- Die **elektrische Feldstärke**  $\vec{E}$

$$\vec{E} = \frac{U}{L} \cdot \hat{e} \quad (2.12)$$

Dabei ist  $U$  die anliegende Spannung,  $L$  der Abstand zwischen den Kondensatorplatten und  $\hat{e}$  ist ein Einheitsvektor, der die Richtung des elektrischen Feldes angibt.

- Die **Verschiebungsdichte**  $\vec{D}$

$$\vec{D} = \frac{Q}{A} \cdot \hat{e} = \sigma \cdot \hat{e} \quad (2.13)$$

Dabei ist  $Q$  die aufgebrauchte Ladung und  $A$  die Querschnittsfläche, bzw.  $\sigma$  ist die Ladungsdichte.

Beide Größen eignen sich gleich gut zum Beschreiben des elektrischen Feldes und können stets ineinander umgerechnet werden. Der Umrechnungsfaktor ist dabei die elektrische Feldkonstante

$$\epsilon_0 = 8,854 \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$$

Somit gilt folgender Zusammenhang:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \quad (2.14)$$

Diese Umrechnung gilt dabei aber **nur im Vakuum**, bzw. näherungsweise auch an der Luft, aber nicht im Festkörper!

## 2.4.2 Influenz und Verschiebungsdichte

Werden zwei Leiterplatten in Kontakt in ein elektrisches Feld zwischen zwei Kondensatorplatten gehalten und dann innerhalb des Feldes auseinander gezogen ohne

## 2 Elektrodynamik

die Kondensatorplatten zu berühren, so existiert nach Herausziehen aus dem elektrischen Feld zwischen den beiden Leiterplatten ebenfalls ein elektrisches Feld, welches gleich stark, aber entgegengesetzt zu dem zwischen den Kondensatorplatten ist. Dieses Experiment wird auch "Influenzexperiment" genannt.

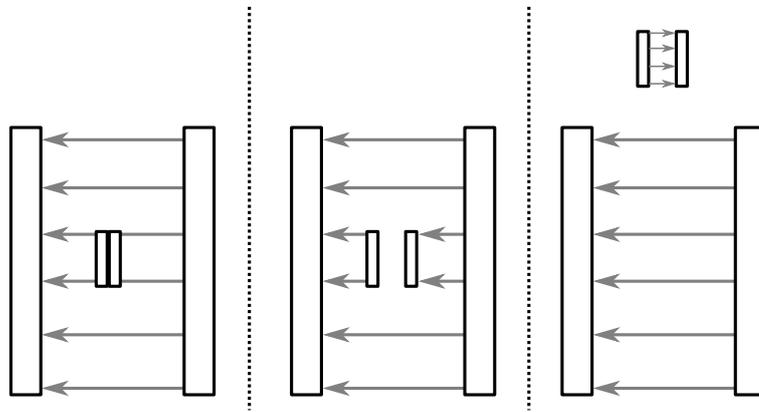


Abbildung 2.12: Skizze zum Influenzexperiment

Dieses Phänomen kann dadurch erklärt werden, dass das elektrische Feld (siehe Gleichung (2.12)), bzw. die Verschiebungsdichte (siehe Gleichung (2.13)) eine Eigenschaft des Raumes zwischen den geladenen Platten ist, sodass die beiden in Kontakt stehenden Leiterplatten bzw. vielmehr ihre Elektronen in dem elektrischen Feld eine Kraft erfahren haben, die sie auf eine Seite, also vermehrt in eine der beiden Platten, gedrückt hat. Somit findet in diesen beiden Platten eine Ladungsverschiebung statt. Diese kontaktlose Ladungsverschiebung wird auch als **Influenz** bezeichnet.

Werden die Platten nun voneinander getrennt, so besitzen beide Platten aufgrund der zuvor erfolgten Influenz ein anderes Potential (eine andere Ladung), sodass zwischen ihnen ebenfalls ein elektrisches Feld herrscht. Da dieses aber entgegengesetzt zu dem der Kondensatorplatten ist (Die negativen Elektronen wurden ja in Richtung des Pluspols des Kondensators verschoben, sodass die Polung der getrennten Platten genau anders herum ist, als die des Kondensators) hebt sich zwischen den Platten das elektrische Feld auf.

Werden die Platten nun wieder aus dem elektrischen Feld heraus gezogen, so bleibt das elektrische Feld zwischen ihnen natürlich erhalten.

### 2.4.3 Das inhomogene elektrische Feld

Da die Feldlinien eines elektrischen Feldes immer senkrecht auf den entsprechenden Oberflächen stehen, ist es leicht zu verstehen, dass homogene Felder nur bei parallelen Leitern auftreten. Da dies aber meistens nicht der Fall ist, ist ein **inhomogenes elektrische Feld** deutlich häufiger.

Der Unterschied zwischen einem homogenen und einem inhomogenen elektrischen Feld ist der, dass das elektrische Feld im inhomogenen Fall ortsabhängig ist, dh. es ist je nach Messpunkt verschieden stark und/oder in eine andere Richtung gerichtet.

Ein einfaches inhomogenes elektrisches Feld ergibt sich zwischen zwei geladenen Kugeln oder zwischen einem verdrehten Kondensator.

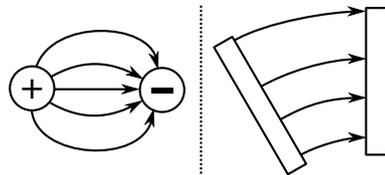


Abbildung 2.13: Skizze der inhomogenen Felder zweier geladener Kugeln, bzw. eines verdrehten Kondensators

Wie am Beispiel der geladenen Kugeln gezeigt werden kann, ist es nicht mehr möglich das elektrische Feld einfach über den Quotienten aus Spannung und Abstand wie in Gleichung (2.12) zu berechnen. Auch die Spannung kann nun nicht mehr ohne Weiteres berechnet werden, sondern nur noch als Integral über das elektrische Feld:

$$U = \int \vec{E} \, d\vec{s}$$

## 2.5 Potentiale und Felder

### 2.5.1 Das elektrostatische Potential

Auch für ein elektrisches Feld kann ein Potential definiert werden (siehe Abschnitt 1.4). Dieses wird dann **elektrostatisches Potential**  $\varphi$  genannt. Die Anwendung

## 2 Elektrodynamik

dieses Potentials bedingt jedoch ein zeitlich invariantes elektrisches Feld, dh. es darf keine Fluktuationen in dem Feld geben.

Konkret bedeutet das, dass für jeden beliebigen Punkt  $P$  ein Potential in Referenz zu einem beliebig gewählten Nullpunkt  $P_0$  berechnet werden. Bei einem elektrostatischen Potential entspricht die Differenz der Potentiale zweier Punkte genau der elektrischen Spannung zwischen den beiden Punkten.

Da das elektrostatische Potential die Verteilung des elektrischen Feldes beschreibt muss analog zu Gleichung 1.51 gelten

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi \quad (2.15)$$

### 2.5.2 Die geladene Kugel

Das elektrische Feld einer geladenen Kugel ist radialsymmetrisch, dh. es breitet sich gleichmäßig in alle Richtungen aus.

Da für die Oberfläche einer Kugel gilt

$$A = 4\pi r^2$$

herrscht auf der, bzw. um die Kugel eine Verschiebungsdichte (siehe Gleichung (2.13)) von

$$\vec{D}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi|\vec{r}|^2} \cdot \hat{r}$$

Somit gilt nach Gleichung (2.14) für das elektrische Feld, welches in diesem Zusammenhang **Coulombfeld** genannt wird

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}|^2} \cdot \hat{r} \quad (2.16)$$

Das **Coulombpotential** ergibt sich dann als

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (2.17)$$

Es zeigt sich also, dass das Coulombfeld bei steigendem Abstand schneller abnimmt (Proportional zu  $\frac{1}{r^2}$ ), als das Coulombpotential (Proportional zu  $\frac{1}{r}$ ).

### Diskrete und kontinuierliche Ladungsverteilung

Wird ein elektrostatisches Potential oder ein elektrisches Feld betrachtet, welches durch mehr als nur eine Ladung zustande kommt, so muss  $\frac{Q}{r}$ , bzw.  $\frac{Q}{r} \cdot \hat{r}$  durch  $\sum \frac{Q_i}{r_i}$ , bzw.  $\sum \frac{Q_i}{r_i} \cdot \hat{r}_i$  ersetzt werden. Somit wird sozusagen mit einem "Schwerpunkt" der Ladung gerechnet, indem die Summe aus allen Ladungen gewichtet mit ihrem Abstand (und ihrer Richtung) zu dem betrachteten Punkt, verwendet wird.

Bei einer kontinuierlichen Ladungsverteilung muss die Summe einfach durch ein entsprechendes Integral ausgetauscht werden.

### 2.5.3 Elektrischer Dipol

»Ein Dipol ist die physikalische Anordnung zweier zueinander entgegengesetzter allgemeiner Ladungen. Da sich die entgegengesetzten Ladungen gegenseitig kompensieren, trägt der Dipol insgesamt keine Ladung.«[13]

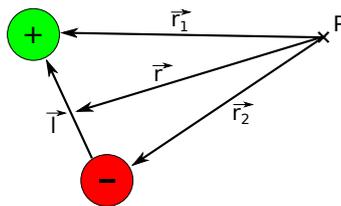


Abbildung 2.14: Skizze eines Dipols in Relation zu einem Punkt  $P$

Für einen Dipol, wie er in Abbildung 2.14 dargestellt ist, kann für jeden Ladungsschwerpunkt ein elektrostatisches Potential berechnet werden:

$$\varphi^-(r_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q^-}{r_1}$$

$$\varphi^+(r_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q^+}{r_2}$$

Da der Dipol nach außen hin keine Ladung trägt, muss gelten

$$Q^- = -Q^+$$

## 2 Elektrodynamik

Da die Felder den gleichen Raum einnehmen, überlagern sie sich, sodass das Feld des negativen Ladungsschwerpunktes und das des Positiven miteinander addiert werden müssen.

$$\begin{aligned}\varphi(r_1, r_2) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q^-}{r_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q^+}{r_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q^-}{r_1} + \frac{Q^+}{r_2} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{Q}{r_1} + \frac{Q}{r_2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{Qr_2}{r_1r_2} + \frac{Qr_1}{r_1r_2} \right) \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_1r_2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{l}{r_1r_2}\end{aligned}$$

Somit ist das elektrostatische Potential eines Dipols gegeben durch

$$\varphi(r_1, r_2) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{l}{r_1r_2} \quad (2.18)$$

Wenn der betrachtete Punkt  $P$  sehr weit weg von dem Dipol ist (Es gilt  $|\vec{r}| \gg |\vec{l}|$ ), so kann als Näherung angenommen, dass Folgendes gilt:

$$\vec{r}_1 \approx \vec{r}_2 \approx \vec{r}$$

Zur besseren Beschreibung eines Dipols wird das **Dipolmoment**  $\vec{p}$  eingeführt

$$\vec{p} = Q \cdot \vec{l} \quad (2.19)$$

Dabei ist  $Q$  die Ladung eines Ladungsschwerpunktes des Dipols und  $\vec{l}$  ist der Abstand zwischen den Ladungsschwerpunkten.

Somit vereinfacht sich Gleichung (2.18) zu

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2} \quad (2.20)$$

Die Verwendung des Skalarproduktes erlaubt es den Effekt der Ausrichtung des Dipols bei der Berechnung des elektrostatischen Potentials zu berücksichtigen.

Um nun die elektrische Feldstärke eines solchen Dipols zu berechnen, wird nach Gleichung (2.15) die Richtungsableitung des elektrostatischen Potentials gebildet.

$$-\vec{E} = \vec{\nabla}\varphi = \vec{\nabla} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \vec{\nabla} \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2}$$

Da gilt

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} &= \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_i \partial_i \\ \vec{p} &= \sum_i p_i \\ \hat{r} &= \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\sum_i r_i}{r}\end{aligned}$$

ergibt sich diese Gleichung als

$$-\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_i p_i \partial_i \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_i p_i \left( \partial_i \vec{r} \cdot \frac{1}{r^3} + \vec{r} \cdot \partial_i \frac{1}{r^3} \right)$$

Der letzte Umformungsschritt kommt durch Anwenden der Produktregel bei der Differentiation zustande.

Da die Länge  $r$  des Vektors  $\vec{r}$  gegeben ist als

$$r = \sqrt{\sum_i r_i^2}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}\partial_i r^{-3} &= \partial_i \sqrt{\sum_i x_i^2}^{-3} = \partial_i \left( \sum_i r_i^2 \right)^{-3/2} = -\frac{3}{2} \cdot \left( \sum_i r_i^2 \right)^{-5/2} \cdot 2r_i \\ &= -3 \cdot \left[ \left( \sum_i r_i^2 \right)^{1/2} \right]^{-5} \cdot r_i = -3 \cdot r^{-5} \cdot r_i \\ &= -\frac{3r_i}{r^5}\end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\partial_i \vec{r} = \vec{e}_i$$

Somit ergibt sich insgesamt

$$\begin{aligned}-\vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_i p_i \left( \vec{e}_i \cdot \frac{1}{r^3} - \vec{r} \cdot \frac{3r_i}{r^5} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left( \frac{\vec{p}}{r^3} - \vec{p} \cdot \vec{r} \cdot \frac{3 \sum r_i}{r^5} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left( \frac{\vec{p}}{r^3} - \vec{p} \cdot \vec{r} \cdot \frac{3}{r^5} \cdot \vec{r} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left( \frac{\vec{p}}{r^3} - \frac{3\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^3} \cdot \hat{r} \right)\end{aligned}$$

## 2 Elektrodynamik

Das elektrische Feld eines Dipols berechnet sich also durch

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3(\vec{p} \cdot \hat{r}) \cdot \hat{r} - \vec{p}}{r^3} \quad (2.21)$$

### 2.5.4 Der elektrische Fluss

Der **elektrische Fluss**  $\Psi$  beschreibt die Anzahl an Feldlinien, die eine bestimmte Fläche  $A$  durchdringen. Somit ist er ein Maß für die Feldliniendichte und da die Dichte der Feldlinien die Stärke des (elektrischen) Feldes angeben, ist der elektrische Fluss ein Maß für die Stärke eines elektrischen Feldes.

$$\Psi = \int \vec{E} \, d\vec{A} \quad (2.22)$$

Im einfachsten Fall ist das elektrische Feld homogen und senkrecht auf der geraden Fläche wie in Abb. 2.15 zu sehen ist.

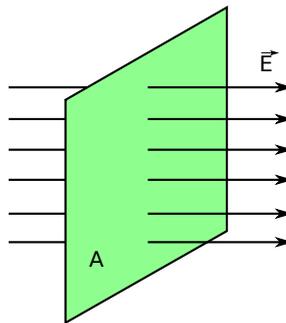


Abbildung 2.15: Ein homogenes elektrisches Feld welches senkrecht auf der zu betrachteten Fläche steht.

Da in diesem Fall sowohl das elektrische Feld als auch der Normalenvektor der betrachteten Ebene gleich ist, können beide Vektoren mittels des selben Einheitsvektors  $\hat{e}$  beschrieben werden. Somit ergibt sich mittels Gleichung (2.22)

$$\Psi = \int E \cdot \hat{e} \, dA \cdot \hat{e} = \int E \, dA \cdot \hat{e} \cdot \hat{e} = \int E \, dA \cdot 1$$

Das Differential  $dA$  kann analog zur Berechnung einer normalen Fläche umgeschrieben werden

$$dA = dx \cdot dy$$

Wird diese Beziehung nun eingesetzt, so ergibt sich ein Doppelintegral, für dessen untere Grenzen der Einfachheit halber immer Null angenommen wird (kann durch geschicktes wählen des Koordinatensystems erreicht werden)

$$\Psi = \int_0^y \int_0^x E \, dx dy$$

Da das elektrische Feld homogen ist, hängt es nicht von  $x$  oder  $y$  ab, sodass es vor das Integral gezogen werden kann.

$$\begin{aligned} \Psi &= E \cdot \int_0^y \int_0^x dx dy = E \cdot \int_0^y [x]_0^x dy = E \cdot \int_0^y x dy \\ &= E \cdot x \cdot \int_0^y dy = E \cdot x \cdot y \end{aligned}$$

In diesem Fall berechnet sich der elektrische Fluss also aus dem Produkt des elektrischen Feldes und der Fläche  $A$  des betrachteten Objektes

$$\Psi = E \cdot A \quad (2.23)$$

Ist die betrachtete Fläche  $A$  nun nicht senkrecht zu dem elektrischen Feld, so muss das elektrische Feld mit einem anderen Einheitsvektor beschrieben werden, als die Fläche selbst ( $\hat{e}_E$ , bzw.  $\hat{e}_A$ )

$$\begin{aligned} \Psi &= \int E \cdot \hat{e}_E \, dA \cdot \hat{e}_A = \int E \, dA \cdot \hat{e}_A \cdot \hat{e}_E = \int E \, dA \cdot \cos(\alpha) \\ &= \cos(\alpha) \cdot \int E \, dA \end{aligned}$$

Dabei ist  $\alpha$  der Winkel zwischen den beiden Einheitsvektoren (welcher beim Bilden des Skalarproduktes benötigt wird).

Der Rest des Integrals ist der selbe, wie im ersten Fall und ist somit über Gleichung (2.23) gegeben. Für den Fall einer zum elektrischen Feld verdrehten Fläche ergibt sich also

$$\Psi = E \cdot A \cdot \cos(\alpha) \quad (2.24)$$

Handelt es sich bei der betrachteten Fläche um eine Fläche, deren Form von einer einfachen Platte abweicht, so muss Gleichung (2.22) direkt verwendet werden.

So kann auch der elektrische Fluss für eine geschlossene Fläche um eine Ladung  $Q$  ermittelt werden. Er ergibt sich als

$$\Psi = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

## 2 Elektrodynamik

Wird dies auf verallgemeinert ergibt sich der **Gauß'sche Satz**

$$\Psi = \oint \vec{E} \, d\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \int \rho \, dV \quad (2.25)$$

Dies bedeutet nichts Anderes, als dass der elektrische Fluss einer geschlossenen Fläche gleich groß wie die Ladung innerhalb dieser Fläche (Die Ladungsdichte  $\rho$  integriert nach dem Volumen ergibt die Ladung  $Q$ ) geteilt durch die elektrische Feldkonstante  $\varepsilon_0$

### Das elektrische Feld um einen unendlich langen Leiter

Betrachtet werden soll ein unendlich langer Leiter, der die Lineare Ladungsverteilung  $\lambda = \frac{dQ}{dl}$  haben soll, wobei  $l$  die Länge beschreibt.

Das bedeutet, dass wenn die Ladungsmenge  $Q$  in einem Leiterstück der Länge  $l$  berechnet werden soll, kann das mit Hilfe von  $\lambda$  geschehen:

$$Q = \int_0^l \lambda \, dl = \lambda \cdot l$$

Dies kann nun in den Gauß'schen Satz (Gleichung (2.25)) eingesetzt werden (Die Ladungsdichte  $\rho$  integriert nach dem Volumen ist nichts anderes als die Ladung  $Q$ ):

$$\oint \vec{E} \, d\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot Q = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \lambda l \quad (I)$$

Das im Gauß'schen Satz vorkommende Integral kann aber auch bestimmt werden, indem die Zylindersymmetrie des Leiters ausgenutzt wird. Somit ergibt sich das Integral zu

$$\oint \vec{E} \, d\vec{A} = E \cdot A = E \cdot 2\pi r l \quad (II)$$

Dabei ist  $2\pi r l$  genau die Mantelfläche eines Zylinders mit dem Radius  $r$  und der Höhe  $l$ , was genau die Fläche ist, die von einem elektrischen Feld durchsetzt wird und somit handelt es sich um diejenige Fläche nach der im Gauß'schen Satz für diesen Fall integriert wird. Des Weiteren wurde noch ausgenutzt, dass das elektrische Feld auf besagter Mantelfläche überall gleich groß ist, sodass das elektrische Feld vor das Integral gezogen werden konnte. Der vektorielle Teil fällt weg, da der Normalenvektor der Mantelfläche stets parallel zum elektrischen Feld steht.

Werden Gleichung I und II gleichgesetzt (schließlich wird ja in beiden Fällen das selbe Integral berechnet) und die Gleichung nach dem elektrischen Feld auflöst, so ergibt sich

$$E(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{r} \quad (2.26)$$

### 2.5.5 Ladungsverteilung in Leitern

Da die Ladungen in Leitern frei verschiebbar sind, sind Überschussladungen aufgrund der gegenseitigen Abstoßung stets außen am Leiter angeordnet. Ein weiterer Effekt dieser Verschiebbarkeit ist derjenige, dass innerhalb eines Leiters keinerlei elektrische Felder auftreten können, da jedes elektrische Feld zunächst in den Leiter hinein muss. Dabei bewirkt es aber eine Verschiebung der Ladungsträger, bis das Feld durch diese Verschiebung wieder aufgehoben wird.

Das selbe Phänomen tritt auf bei von Leitern umschlossenen Hohlräumen auf. Solche Hohlräume werden auch **Faraday'scher Käfig** genannt.

Außerdem kann damit auch begründet werden, dass die elektrischen Feldlinien immer senkrecht auf den Leitern stehen müssen. Alles andere würde die die Ladungsträger ebenfalls wieder verschieben.

### 2.5.6 Der Kondensator

»Ein **Kondensator** ist ein passives elektrisches Bauelement mit der Fähigkeit, in einem Gleichstromkreis elektrische Ladung und die damit zusammenhängende Energie statisch in einem elektrischen Feld zu speichern.«[14]

Diese Fähigkeit eine bestimmte Ladung bei einer bestimmten Spannung zu speichern wird als die Kapazität  $C$  eines Kondensators bezeichnet.

$$C = \frac{Q}{U} \quad (2.27)$$

Die Einheit der Kapazität ist das Farad  $F$

$$[C] = 1 F = 1 \frac{C}{V}$$

## 2 Elektrodynamik

In der Praxis besteht ein Kondensator einfach aus zwei Leitern, die sich gegenüber stehen, aber nicht miteinander verbunden sind. Wird nun eine verschiedenartige Spannung an beiden Leitern angelegt, so bildet sich zwischen ihnen ein elektrisches Feld, welches auch nach Abtrennen von der Spannungsquelle bestehen bleibt.

### Der Plattenkondensator

Ein Plattenkondensator besteht aus zwei parallelen Leiterplatten der Querschnittsfläche  $A$  und dem Abstand  $l$ . Zwischen den Platten herrscht ein homogenes elektrisches Feld, das durch Gleichung (2.12) gegeben ist. Dieses elektrische Feld lässt sich aber auch mittels Gleichung (2.14) über die Verschiebungsdichte  $D$  beschrieben werden, welche ihrerseits durch die Ladungsdichte  $\sigma$  beschrieben wird.

Da die Richtung des elektrischen Feldes in diesem Fall egal ist, kann die Multiplikation mit dem entsprechenden Einheitsvektor wie er in oben referenzierten Gleichungen vorkommt weggelassen werden, sodass gilt

$$E = \frac{U}{l} = \frac{D}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{A \cdot \varepsilon_0}$$

Für die Kapazität (siehe Gleichung (2.27)) des Kondensators gilt also

$$\begin{aligned} \frac{U}{l} &= \frac{Q}{A \cdot \varepsilon_0} \\ \frac{A \cdot \varepsilon_0}{l} &= \frac{Q}{U} \end{aligned}$$

Wenn nun noch die Definition der Kapazität eingesetzt wird, so ergibt sich für einen Plattenkondensator

$$C = \varepsilon_0 \cdot \frac{A}{l} \tag{2.28}$$

### Der Kugelkondensator

Ein Kugelkondensator besteht aus einer großen, äußeren Kugel (Radius  $r_2$ ), in die eine zweite, kleinere Kugel (Radius  $r_1$ ) verschachtelt ist.

Die elektrischen Felder, bzw. Potentiale können als Coulombfeld, bzw. -potential (siehe Gleichung (2.16), bzw. (2.17)) beschrieben werden, da die einzelnen elektrischen Ladungen genau in der Kugelmittel auf einen gemeinsamen Ladungsschwerpunkt fallen, was also die Beschreibung als Punktladung zulässt. Die Potentiale der Kugeln sind dementsprechend gegeben über

$$\varphi_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r_1}$$

$$\varphi_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r_2}$$

Die Spannung, die ja nichts anderes als eine Potentialdifferenz ist, kann also folgendermaßen geschrieben werden:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$\frac{U}{Q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$\frac{Q}{U} = 4\pi\epsilon_0 \cdot \frac{1}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} = 4\pi\epsilon_0 \cdot \frac{1}{\frac{r_2}{r_1 r_2} - \frac{r_1}{r_2 r_1}}$$

$$= 4\pi\epsilon_0 \cdot \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}$$

Demnach gilt also für einen Kugelkondensator

$$C = 4\pi\epsilon_0 \cdot \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \quad (2.29)$$

### Laden von Kondensatoren

Zum Aufladen eines Kondensators muss eine Spannung an selbigen angelegt werden.

## 2 Elektrodynamik

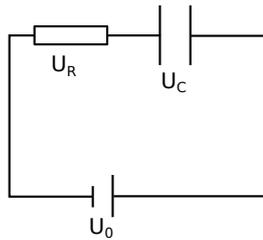


Abbildung 2.16: Schaltkreis zum Laden eines Kondensators. Dabei repräsentiert der zwischengeschaltete Widerstand den Gesamtwiderstand des gesamten Stromkreises.

Nach der Maschenregel muss gelten, dass die Anfangsspannung  $U_0$  als Summe der beiden Spannungen am Widerstand  $U_R$  und am Kondensator  $U_C$  errechnet werden kann.

$$U_0 = U_R + U_C$$

Die Spannung an einem Widerstand  $R$  ist durch das Ohm'sche Gesetz (siehe Gleichung 2.3) gegeben, wohingegen die Spannung am Kondensator durch seine Kapazität (siehe Gleichung (2.27)) beschrieben werden kann. Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} U_0 &= R \cdot I + \frac{Q}{C} \\ &= R \cdot \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} \end{aligned}$$

Bei dieser Gleichung handelt es sich um eine inhomogene, lineare Differenzialgleichung erster Ordnung für die Ladung auf dem Kondensator in Abhängigkeit von der Zeit  $Q(t)$

Alternativ kann eine entsprechende DGL für die Stromstärke im Stromkreis in Abhängigkeit von der Zeit  $I(t)$  durch Differenzieren obiger DGL nach der Zeit erhalten werden

$$\begin{aligned} \frac{dU_0}{dt} &= R \cdot \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{dQ}{dt} \cdot \frac{1}{C} \\ 0 &= R \cdot \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} \end{aligned}$$

Diese DGLs sind mittels der Separation der Variablen und anschließender Integration zu Lösen. Die spezielle Lösung wird erhalten, wenn als Anfangsbedingung

$Q(0) = 0$  eingesetzt wird, da der Kondensator zu Beginn des Ladungsvorganges noch keine Ladung trägt. Analog kann für die zweite DGL die Anfangsbedingung  $I(0) = I_0$  eingesetzt werden, da zu Beginn logischerweise die Anfangsstromstärke  $I_0$  fließen muss. Somit ergibt sich für das Laden eines Kondensators

$$\begin{aligned} Q(t) &= U_0 C \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right) \\ I(t) &= I_0 \cdot \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \end{aligned} \quad (2.30)$$

### Entladen von Kondensatoren

Beim Entladen eines Kondensators kann die Schaltung analog zu Abbildung 2.16 aussehen, nur dass natürlich keine Stromquelle mehr in dem Stromkreis eingebaut ist.

Nach der Maschenregel muss für diesen Fall gelten

$$\begin{aligned} 0 &= U_R + U_C \\ &= R \cdot \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} \end{aligned}$$

Diese DGL kann analog wie beim Laden eines Kondensators gelöst werden und liefert für das Entladen eines Kondensators

$$\begin{aligned} Q(t) &= Q_0 \cdot \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \\ U(t) &= \frac{Q(t)}{C} = U_0 \cdot \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \\ I(t) &= \frac{dQ(t)}{dt} = -I_0 \cdot \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \end{aligned} \quad (2.31)$$

### Kondensatoren in Schaltungen

Kondensatoren verhalten sich in Schaltungen genau umgekehrt wie Widerstände, wenn es darum geht die Gesamtkapazität des Stromkreises zu berechnen.

Das bedeutet, dass in Reihenschaltungen gilt

$$\frac{1}{C_{ges}} = \sum_i \frac{1}{C_i} \quad (2.32)$$

und in Parallelschaltungen

$$C_{ges} = \sum_i C_i \quad (2.33)$$

## 2.6 Kräfte im elektrischen Feld

Wird eine Ladung  $q$  im elektrischen Feld bewegt, so erfordert dies nach Gleichung (2.11) eine Kraft  $\vec{F}$ . Wird diese Ladung nun von Punkt 1 zu Punkt 2 bewegt, so wird eine Kraft über eine Strecke aufgebracht, also Arbeit geleistet.

$$W = - \int \vec{F} \, d\vec{s} = - \int q\vec{E} \, d\vec{s} = -q \cdot \int \vec{E} \, d\vec{s}$$

Das negative Vorzeichen ist dabei eine Konvention, die Arbeit, die geleistet wird (also aus dem System "verschwindet") ein negatives Vorzeichen zuteilt.

Das elektrische Feld integriert über einen Raum (in diesem Fall ein eindimensionaler Raum in Form einer Geraden von Punkt 1 nach Punkt 2) ist nach Gleichung (2.15) ein elektrostatisches Potential  $\varphi$ . Somit ergibt sich

$$W = -q \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) = -q \cdot \Delta\varphi$$

Da die Potentialdifferenz nichts anderes als die Spannung  $U$  ist, kann auch geschrieben werden

$$W = -q \cdot U \quad (2.34)$$

Die Berechnung wie sie hier durchgeführt wurde **gilt allerdings nur für vergleichsweise kleine Ladungen**, deren eigenes elektrisches Feld vernachlässigbar klein ist, sodass angenommen werden kann, dass  $\vec{E}$  das elektrische Feld wie es im Raum liegt ist, ohne Einflüsse des elektrischen Feldes von  $q$  selbst.

Somit gilt für die Leistung

$$P = \frac{dW}{dt}$$

Demnach lässt sich also die Leistung berechnen durch

$$P = U \cdot I \quad (2.35)$$

### 2.6.1 Energie im Kondensator

Um zu bestimmen, wie viel Energie in einem Kondensator gespeichert ist, wenn er voll aufgeladen ist, muss der Ladevorgang von kompletter Entladung bis zur vollständigen Ladung betrachtet werden und dabei berechnet werden, wie viel Energie, bzw. Arbeit zur Aufladung verwendet wurde.

Die Aufladung verläuft aber asymptotisch, sodass die vollständige Ladung eines Kondensators erst nach unendlicher Zeit erreicht werden kann. Für die im Kondensator gespeicherte Energie gilt also

$$E = \int_0^\infty dW$$

Die Arbeit, die im elektrischen Feld verrichtet wird, ist über Gleichung (2.34) gegeben. Wird nun die Ladung  $q$  umgeschrieben zu  $\frac{dI}{dt}$ , so ergibt sich

$$E_C = \int_0^\infty U_C \cdot I \, dt$$

Die Stromstärke beim Laden eines Kondensators ist gegeben durch Gleichung (2.30) und die Spannung kann wieder geschrieben werden durch  $\frac{Q}{C}$ , wobei die Ladung beim Laden eines Kondensators ebenfalls über Gleichung (2.30) gegeben ist. Somit ergibt sich also

$$\begin{aligned} E_C &= - \int_0^\infty U_0 \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right) \cdot I_0 \cdot \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \, dt \\ &= -U_0 I_0 \cdot \int_0^\infty \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) - \exp\left(-2\frac{t}{RC}\right) \, dt \\ &= -U_0 I_0 \cdot \left[ \int_0^\infty \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \, dt - \int_0^\infty \exp\left(-2\frac{t}{RC}\right) \, dt \right] \\ &= -U_0 I_0 \cdot \left( \left[ -RC \cdot \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \right]_0^\infty - \left[ -\frac{RC}{2} \cdot \exp\left(-2\frac{t}{RC}\right) \right]_0^\infty \right) \\ &= -U_0 I_0 \cdot \left( -RC - \left(-\frac{RC}{2}\right) \right) \\ &= \frac{RC}{2} \cdot U_0 \cdot I_0 \end{aligned}$$

Durch Umschreiben der elektrischen Stromstärke mittels des ohm'schen Gesetzes (siehe Gleichung 2.3) ergibt sich schlussendlich

$$E_C = \frac{1}{2} \cdot C U_0^2 \quad (2.36)$$

### 2.6.2 Die Energiedichte im elektrischen Feld

Liegt ein Plattenkondensator vor, so kann die Kapazität in Gleichung (2.36) gemäß Gleichung (2.28) ersetzt werden, sodass sich ergibt

$$\begin{aligned} E_{pot} &= \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \frac{A}{l} U_0^2 = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon A \cdot l \cdot \frac{U_0^2}{l^2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \varepsilon V \cdot \frac{U_0^2}{l^2} \end{aligned}$$

Mit der Definition der elektrischen Feldstärke gemäß Gleichung (2.12) kann diese Gleichung umgeschrieben werden zu

$$E_{pot} = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \cdot E^2 \cdot V$$

Mit Hilfe dieser allgemeinen Formel für die potentielle Energie innerhalb eines elektrischen Feldes kann die Energiedichte  $\rho_{el} = \frac{E_{pot}}{V}$  bestimmt werden.

$$\rho_{el} = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \cdot E^2$$

Da das Produkt aus der elektrischen Feldkonstante  $\varepsilon_0$  mit der elektrischen Feldstärke nichts anderes ist, als die Verschiebungsdichte  $D$  (siehe Gleichung (2.14)) kann diese Gleichung auch geschrieben werden als

$$\rho_{el} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot E$$

Verallgemeinert mit Hilfe von vektorieller Schreibweise ergibt sich also

$$\rho_{el} = \frac{1}{2} \cdot \vec{D} \cdot \vec{E} \quad (2.37)$$

Das bedeutet auch, dass die potentielle Energie durch Volumenintegration dieser Energiedichte erhalten werden kann:

$$dE_{pot} = \int \rho_{el} dV \quad (2.38)$$

### 2.6.3 Kraft zwischen zwei elektrischen Ladungen

Zwischen zwei Punktladungen  $q_1$  und  $q_2$  herrscht eine Kraft. Diese ist durch die elektrischen Felder der beiden Ladungen gegeben (gemäß Gleichung (2.11)). Da es sich bei den beiden Ladungen um Punktladungen handelt, handelt es sich bei den Einzelfeldern jeweils um ein Coulombfeld, welches über Gleichung (2.16) beschrieben werden kann.

Wird der Verbindungsvektor von  $q_1$  nach  $q_2$   $\vec{r}_1$  genannt und der von  $q_2$  nach  $q_1$   $\vec{r}_2$  so ist die jeweilige Kraft auf den anderen Ladungsträger gegeben durch

$$\vec{F}_1(\vec{r}_2) = q_1 \cdot \vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r_2^2} \cdot \hat{r}_2$$

$$\vec{F}_2(\vec{r}_1) = q_2 \cdot \vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_2 \cdot q_1}{r_1^2} \cdot \hat{r}_1$$

Da die Kraft anscheinend für beide Fälle betragsmäßig gleich ist ( $\hat{r}_1 = -\hat{r}_2$ ), scheint es sich um ein allgemeingültiges Gesetz zu handeln. Die Kraft die zwischen solchen Punktladungen herrscht wird **Coulombkraft** genannt.

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \cdot \hat{r} \quad (2.39)$$

Ist die Coulombkraft positiv (beide Ladungen haben das gleiche Vorzeichen), so erfolgt eine Abstoßung. Ist sie negativ (beide Ladungen haben ein entgegengesetztes Vorzeichen) so erfolgt eine Anziehung.

#### Coulombkräfte aufgrund von Influenz

Ist eine elektrische Ladung nah genug an einer leitenden, aber ungeladenen Oberfläche (z.B. metallische Wand), so erfährt die Ladung eine von der Wand ausgehende Anziehung.

Grund hierfür ist das elektrische Feld der Ladung, welches in der leitenden Oberfläche aufgrund von Influenz die Ladungsverteilung polarisiert, sodass besagte Oberfläche nun ebenfalls ein elektrisches Feld "ausstrahlt".

Somit erfährt also die Ladung durch das induzierte elektrische Feld der Wand eine anziehende Kraft (Durch die Influenz werden die gleichnamigen Ladungen von der Ladung weg, bzw. die Ungleichnamigen zur Ladung hin verschoben).

## 2 Elektrodynamik

Diese anziehende Kraft ist dabei genau so groß, als wäre hinter der Oberfläche im Gleichen Abstand eine zweite, entgegengesetzte Ladung mit der die betrachtete Ladung wechselwirkt.

Qualitativ kann dies damit erklärt werden, dass das elektrische Feld (ein Coulombfeld) mit dem Abstand zur Ladung abnimmt, dh. bis zur Influenz der leitenden Oberfläche hat es bereits die Strecke  $r$  zurückgelegt, sodass das durch die Influenz erzeugte elektrische Feld entsprechend kleiner ist, als das der eigentlichen Ladung. Dieses Feld muss nun aber erst wieder zur Ladung gelangen, wobei es wiederum die Strecke  $r$  zurücklegen muss und dabei auch wieder schwächer wird. Insgesamt muss das Feld, welches von der Ladung ausgeht und wieder zur Ladung "zurückkehrt" (in Form des Feldes der Oberfläche), eine Strecke von  $2r$  zurücklegen, was also der Strecke zwischen der Ladung und einer zweiten Ladung, welche im gleichen Abstand auf der anderen Seite der Oberfläche ist, entspricht.

### 2.6.4 Der elektrische Dipol im homogenen, elektrischen Feld

Befindet sich ein elektrischer Dipol in einem elektrischen Feld, so erfahren beide Ladungsschwerpunkte des Dipols aufgrund des elektrischen Feldes eine Kraft. Diese Kraft ist logischerweise für beide Ladungsschwerpunkte gleich groß (da bei einem Dipol beide Ladungsschwerpunkte die selbe Ladung aufweisen), aber entgegengesetzt gerichtet (da die Ladungsschwerpunkte ungleichnamig geladen sind).

Ist der Dipol parallel zu den Feldlinien ausgerichtet (Der Verbindungsvektor  $\vec{l}$  zwischen den Ladungsschwerpunkten ist parallel zum elektrischen Feld  $\vec{E}$ ) so kompensieren sich die beiden Kräfte zu Null, sodass der Dipol keine Kraft erfährt.

Ist diese Parallelität jedoch nicht gegeben, so erfährt der Dipol sehr wohl eine Kraft.

Es soll ein elektrischer Dipol betrachtet werden, der im Vergleich zum elektrischen Feld  $\vec{E}$  um  $\alpha$  verdreht ist.

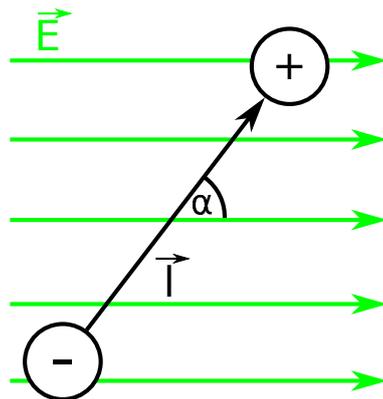


Abbildung 2.17: Ein elektrischer Dipol in einem elektrischen Feld  $\vec{E}$  mit einer "Verdrehung"  $\alpha$

In einem solchen elektrischen Feld erfährt der "Pluspol" mit der Ladung  $Q^+$  eine Kraft  $\vec{F}^+$  entlang der Feldlinien und der "Minuspol" mit der Ladung  $Q^-$  eine Kraft  $\vec{F}^-$  entgegengesetzt der Feldlinien.

Nach Gleichung (2.11) gilt für diese Kräfte

$$\begin{aligned} \vec{F}^+ &= \vec{E} \cdot Q^+ \\ \vec{F}^- &= \vec{E} \cdot Q^- \end{aligned}$$

Wären die Ladungen frei voneinander würden sie sich also in unterschiedliche Richtungen voneinander entfernen.

Allerdings sind diese Ladungen in einem Dipol nicht unabhängig voneinander, sondern miteinander verbunden. Diese Verbindung kann als einfache Beschreibung über den Verbindungsvektor  $\vec{l}$  der Ladungen angesehen werden, der im Folgenden auch als feste Verbindungsachse betrachtet wird (Was er im Endeffekt auch ist, nur meistens in Form von z.B. mehreren Verbindungsachsen zwischen den Atomen eines Moleküls).

Die Kraft, welche parallel zu den Feldlinien wirkt, wird also in einen Anteil senkrecht zu  $\vec{l} - \vec{F}_\perp$  - und einem Anteil parallel zu  $\vec{l} - \vec{F}_\parallel$  - aufgeteilt.

## 2 Elektrodynamik

$$\begin{aligned}\vec{F}_\perp &= \vec{F} \cdot \sin(\alpha) \\ \vec{F}_\parallel &= \vec{F} \cdot \cos(\alpha)\end{aligned}$$

Da gilt  $\vec{F}^- = -\vec{F}^+$  sind die senkrechten und parallelen Komponenten dieser Kräfte ebenfalls entgegen gerichtet, sodass sich die parallelen Komponenten gegenseitig aufheben. Somit findet keine Translation des Dipols statt.

Die senkrechten Komponenten erzeugen allerdings jeweils ein Drehmoment und da die Kräfte entgegengesetzt wirken und genau an entgegen gesetzten Seiten des Mittelpunktes angreifen, addieren sich die Drehmomente, sodass einfach geschrieben werden kann

$$\begin{aligned}M &= \sin(\alpha) \cdot |\vec{F}^+| \cdot \frac{1}{2} |\vec{l}| + \sin(\alpha) \cdot |\vec{F}^-| \cdot \frac{1}{2} (-|\vec{l}|) \\ &= 2 \sin(\alpha) \cdot F \cdot \frac{1}{2} l = \sin(\alpha) \cdot F \cdot l \\ &= \sin(\alpha) \cdot Q \cdot E \cdot l\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Definition des elektrischen Dipolmoments  $\vec{p}$  (siehe Gleichung (2.19)) ergibt sich dann schlussendlich

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E} \quad (2.40)$$

Das so erzeugte Dipolmoment bewirkt also, dass sich der Dipol entlang der Feldlinien ausrichtet.

Soll der Dipol wieder eine andere Orientierung annehmen, so muss ein externes Drehmoment erzeugt werden, das den Dipol in die gewünschte Richtung dreht. Dabei wird nach Gleichung 1.44 Arbeit verrichtet. Da das äußere Drehmoment  $\vec{M}_a$  das durch das elektrische Feld erzeugte Drehmoment  $\vec{M}_i$  überwinden muss, gilt  $\vec{M}_a = -\vec{M}_i$ .

$$W = \int \vec{M}_a \, d\alpha = - \int \vec{M}_i \, d\alpha = -p \cdot E \cdot \int \sin \alpha \, d\alpha$$

Somit ist die verrichtete Arbeit (bei konstantem elektrischem Feld) gegeben durch

$$W = p \cdot E \cdot \cos(\alpha) = \vec{p} \cdot \vec{E} \quad (2.41)$$

Diese Drehung durch ein äußeres Drehmoment kann gewissermaßen wie eine Spannung einer Feder betrachtet werden. Somit erfährt der Dipol eine ‐Aufladung‐ seiner potentiellen Energie  $E_{pot}$ . Wird als Referenzpunkt ein Dipol, der im elektrischen Feld ausgerichtet ist, angenommen, so gilt

$$E_{pot} = -\vec{p} \cdot \vec{E} \quad (2.42)$$

### 2.6.5 Der elektrische Dipol im inhomogenen, elektrischen Feld

Auch in einem inhomogenen, elektrischen Feld erfährt ein elektrischer Dipol ein Drehmoment, welches dafür sorgt, dass sich der Dipol parallel zu den Feldlinien anordnet.

Da aber in einem inhomogenen, elektrischen Feld die Feldstärke  $E$  an beiden Ladungsschwerpunkten des Dipols verschieden ist, erfahren beide eine unterschiedlich starke Kraft, sodass sich die zur Verbindungsachse des Dipols parallelen Kräfte nicht gegenseitig aufheben. Dies führt dann zu einer Translationsbewegung des Dipols.

Wird angenommen, dass die elektrische Feldstärke am negativen Ladungsschwerpunkt um  $\Delta E$  zu dem am Positiven verschieden ist, so ergibt sich eine resultierende Kraft (für den Fall dass der Dipol bereits parallel zu den Feldlinien ausgerichtet ist)  $F_{res}$  wie folgt

$$\begin{aligned} F_{res} &= F^+ + F^- \\ &= +Q \cdot E + (-Q) \cdot (E - \Delta E) = Q \cdot \Delta E \\ &= Q \cdot l \cdot \frac{\Delta E}{l} = p \cdot \frac{\Delta E}{l} \end{aligned}$$

Dabei ist  $l$  der Abstand zwischen den Dipol-Ladungsschwerpunkten und  $p$  das Dipolmoment.

Wird nun der Grenzfall  $l \Rightarrow 0$  betrachtet, so geht der Bruch  $\frac{\Delta E}{l}$  in ein Differential über. Somit gilt verallgemeinert

$$F_{res} = p \cdot \frac{dE}{dl}$$

Wird der allgemeine Fall betrachtet, dass die Ausrichtung des Dipols noch nicht parallel zu den Feldlinien ist, so muss nicht nur in eine, sondern in alle Raumrich-

## 2 Elektrodynamik

tungen abgeleitet werden. Somit gilt

$$F_{res} = p \cdot \nabla E \quad (2.43)$$

Die somit wirkende Kraft bewirkt also eine Translationsbewegung, die je nach Ausrichtung des Dipols dafür sorgt, dass der Dipol in den Bereich des stärkeren elektrischen Feldes hineingezogen oder aber aus diesem herausgedrückt wird.

## 2.7 Materie im elektrischen Feld

Das Verhalten von elektrischen Leitern im elektrischen Feld wurde bereits behandelt. Dabei führt die freie Verschiebbarkeit der Ladungen dazu dass im Leiter eine Ladungsverschiebung stattfindet, sodass der Leiter im Inneren feldfrei bleibt.

Die Frage die sich nun stellt ist, wie sich ein Dielektrikum (Isolator) im elektrischen Feld verhält.

Dazu wird zunächst ein Kondensator der Kapazität  $C_0$  betrachtet, der voll geladen ist. Wird nun ein Dielektrikum zwischen die Platten des Kondensators geschoben, so ist an dem Kondensator ein Spannungsabfall zu beobachten.

Da sich an der Ladung im Kondensator nichts geändert hat, muss die Kapazität des Kondensators gemäß  $C = \frac{Q}{U}$  gestiegen sein, damit der Spannungsabfall erklärt werden kann.

Dies wird bestätigt, wenn der Kondensator an eine Spannungsquelle angeschlossen ist und dann das Dielektrikum eingeschoben wird. Hierbei ist nun eine Ladungszunahme auf dem Kondensator zu beobachten, wobei die Spannung gleich bleibt, sodass auch hier die Kapazität des Kondensators gestiegen sein muss.

Im ersten Fall kann der Spannungsabfall von der Anfangsspannung  $U_0$  auf die Spannung mit dem Dielektrikum  $U_m$  folgendermaßen beschrieben werden:

$$U_m = \frac{U_0}{\varepsilon_r}$$

$\varepsilon_r$  ist dabei die sogenannte **Dielektrizitätszahl**. Sie ist eine materialspezifische Konstante.

Für das elektrische Feld (siehe (2.12)) mit dem eingeschobenen Dielektrikum gilt demnach

$$E_m = \frac{U_m}{l} = \frac{U_0}{\varepsilon_r \cdot l}$$

Somit gilt für die Verschiebungsdichte  $D$  nicht mehr Gleichung (2.14), sondern

$$D = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 \cdot E \quad (2.44)$$

Bei der Umrechnung muss also zusätzlich berücksichtigt werden, was für ein Material involviert ist.

### 2.7.1 Di- und Paraelektrizität

Die Unterteilung von Materie in **dielektrisch** und **paraelektrisch** erfolgt aufgrund ihrer Dipoleigenschaften.

Besitzen die Atome oder Moleküle in einem Stoff kein permanentes Dipolmoment, so können i.d.R. trotzdem temporäre Dipole induziert werden. Diese Art Stoff heißt dann dielektrisch.

Für einen dielektrischen Stoff gilt außerdem  $\varepsilon_r > 1$ .

Das bedeutet also, dass bei einem dielektrischen Stoff im elektrischen Feld Ladungsschwerpunkte induziert werden, indem die Elektronenhülle der einzelnen Atome, bzw. Moleküle polarisiert wird. Jedes Molekül bekommt somit ein Dipolmoment von

$$\vec{p} = \alpha \cdot \vec{D} = \alpha \cdot \varepsilon_0 \cdot \vec{E}$$

Dabei ist  $\alpha$  die Polarisierbarkeit des betrachteten Stoffes.

Da ein solcher Stoff aber nicht nur aus einem, sondern aus  $N$  Atomen, bzw. Molekülen besteht, in denen allen dieses Dipolmoment induziert wird, gilt für das von dem Stoff ausgehende **Polarisationsfeld**  $\vec{P}$  folgender Zusammenhang

$$\vec{P} = N \cdot \vec{p} = N \cdot \alpha \cdot \varepsilon_0 \cdot \vec{E} \quad (2.45)$$

Stoffe, die aus Molekülen aufgebaut sind, die von vornherein ein permanentes Dipolmoment besitzen, werden als paraelektrisch bezeichnet.

## 2 Elektrodynamik

Normalerweise zeigen diese ‘‘Molekldipole’’ in alle mögliche Richtungen (somit besitzt der Stoff als Gesamtes also keine Polarisation), aber wird der Stoff in ein elektrisches Feld gebracht, so richten sich die Moleküle gemäß ihres Dipolmoments im elektrischen Feld aus. Zwar fluktuieren die Ausrichtungen der Dipole trotzdem noch, allerdings sind sie im Durchschnitt parallel zu den Feldlinien angeordnet, wobei ein Grotteil davon mit den Feldlinien und nur ein kleiner Teil gegen die Feldlinien ausgerichtet ist.

Die so erreichte Polarisation kann mit folgender Formel berechnet werden

$$\vec{P} = \frac{N \cdot p^2 \cdot \vec{E}}{3k_B \cdot T} \quad (2.46)$$

Stoffe mit einer sehr großen Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_r$  sind meist **ferroelektrisch**. Dies bedeutet, dass sie sich in einem elektrischen Feld polarisieren, aber im Unterschied zu einem paraelektrisch Stoff verschwindet die Polarisation nach Entfernen des elektrischen Feldes nicht wieder (nur durch hohe Temperaturen).

### 2.7.2 Kraft auf ein Dielektrikum im elektrischen Feld

#### Parallel zu den Feldlinien

Zwischen zwei Kondensatorplatten herrscht aufgrund des elektrischen Feldes eine Kraft (parallel zu den Feldlinien), welche gegeben ist durch Gleichung (2.11).

$$dF_{\parallel} = E dq$$

Wird die elektrische Feldstärke durch Gleichung (2.12) ausgedrückt und die Ladungsänderung über Gleichung (2.27) als Änderung der Spannung und der konstanten Kapazität des Kondensators, so ergibt sich

$$dF_{\parallel} = \frac{U}{l} \cdot C dU$$
$$F_{\parallel} = \frac{C}{l} \cdot \int_0^U U dU = \frac{C}{l} \cdot \frac{1}{2} U^2$$

Die Spannung in der Kapazität (siehe Gleichung (2.27)) kann durch die elektrische Feldstärke (siehe Gleichung (2.12)) ausgedrückt werden:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{E \cdot l}$$

Das elektrische Feld selbst kann über Gleichung (2.14) auch über die Verschiebungsdichte ausgedrückt werden, welche gemäß Gleichung (2.13) auch als Ladungsdichte geschrieben werden kann.

$$C = \frac{Q}{\frac{D}{\varepsilon_0} \cdot l} = \frac{Q}{\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \cdot l} = \frac{Q}{l} \cdot \frac{\varepsilon_0}{\sigma}$$

Wird nun die Definition der Ladungsdichte (siehe Gleichung (2.13)) eingesetzt, so ergibt sich

$$C = \frac{Q}{l} \cdot \frac{\varepsilon_0}{\frac{Q}{A}} = \frac{Q}{l} \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{A}{Q}$$

Diese Beziehung kann nun in die Ausgangsgleichung für die Kraft eingesetzt werden, sodass sich ergibt

$$\begin{aligned} F_{\parallel} &= \frac{A \cdot \varepsilon_0}{l^2} \cdot \frac{1}{2} U^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{U}{l} \right)^2 \cdot \varepsilon_0 \cdot A \\ &= \frac{1}{2} E^2 \cdot \varepsilon_0 \cdot A \end{aligned}$$

Über Gleichung (2.14) kann das Produkt aus elektrischer Feldstärke und der Dielektrizitätskonstante im Vakuum zur Verschiebungsdichte, bzw. der Flächenladungsdichte zusammengefasst werden.

Somit ergibt sich für die Kraft zwischen zwei Kondensatorplatten ohne Dielektrikum

$$F_{\parallel} = \frac{1}{2} \sigma A \cdot E = \frac{1}{2} Q \cdot E \quad (2.47)$$

Anders formuliert kann aus dieser Gleichung auch eine Art "Kraftdichte" pro Flächeneinheit definiert werden:

$$\frac{F_{\parallel}}{A} = \frac{1}{2} \sigma \cdot E$$

Dieses Ergebnis ist auch nicht weiter überraschend, da die Kraft in einem elektrischen Feld durch Gleichung (2.12) als  $Q \cdot E$  gegeben ist. Da  $Q$  die Gesamtladung beider Platten ist, ist es logisch, dass auf einer Platte nur die Hälfte der Gesamtladung sitzt und somit eine Platte auch nur die Hälfte der Kraft erfährt.

Wird nun ein Dielektrikum in das Feld eingeschoben, so ändert sich die Kapazität  $C_0$  des Kondensators um den Faktor  $\varepsilon_r$ , da sich die Verschiebungsdichte gemäß

## 2 Elektrodynamik

Gleichung (2.44) ändert. Wird damit die Herleitung von Gleichung (2.28) für einen Plattenkondensator durchgeführt, ergibt sich

$$C_m = \varepsilon_r \cdot C_0$$

Ist nun beim Einschieben des Dielektrikums eine konstante Spannung an den Kondensator angelegt, so wird die im Kondensator gespeicherte Ladung aufgrund der Kapazitätsänderung verändert (Je nach Größe von  $\varepsilon_R$ ). Wenn obige Herleitung analog unter Beachtung von  $\varepsilon_r$  durchgeführt wird, so ergibt sich

$$F_{\parallel,m} = \varepsilon_r \cdot F_0$$

Dabei ist  $F_{\parallel,m}$  die Kraft nach und  $F_0$  die Kraft vor Einschieben des Dielektrikums.

Anstatt die Kraft auf die Kondensatorplatten zu betrachten (wie es bis hier hin geschehen ist), kann natürlich auch die Kraft betrachtet werden, die auf das eingeschobene Dielektrikum wirkt. Dazu muss beachtet werden, dass die Verschiebungsdichte  $D$  und damit auch die Flächenladungsdichte  $\sigma$  auf dem Dielektrikum anders sind, als auf den Kondensatorplatten. Dazu muss sich vor Augen gehalten werden, dass auf das Dielektrikum sowohl das elektrische Feld des Kondensators wirkt, als auch dasjenige, das durch seine Polarisation entsteht. Da das durch die Polarisation entstandene elektrische Feld genau entgegen dem Kondensatorfeld zeigt, ist es letztendlich die Differenz der beiden Felder, die für die Verschiebungsdichte verantwortlich ist.

Da die Flächenladungsdichte mehr oder weniger direkt mit dem elektrischen Feld zusammen hängt, ist die resultierende Flächenladungsdichte des Dielektrikums (**Polarisationsdichte**)  $\sigma_p$  gegeben durch die Differenz der Flächenladungsdichte des Dielektrikums und der des Kondensators  $\sigma_0$ .

$$\sigma_p = \sigma_m - \sigma_0 = \varepsilon_r \cdot \sigma_0 - \sigma_0$$

Etwas kompakter geschrieben ergibt sich also

$$\sigma_p = (\varepsilon_r - 1)\sigma_0 \quad (2.48)$$

Wenn also die Polarisationsdichte anstatt der Flächenladungsdichte verwendet wird (was der resultierende Flächenladungsdichte auf dem Dielektrikum entspricht), so ergibt sich für die Kraft **auf das Dielektrikum** folgender Ausdruck

$$\frac{F_{\parallel}}{A} = \frac{1}{2} \sigma_p \cdot E \quad (2.49)$$

### Senkrecht zu den Feldlinien

Wird ein Dielektrikum teilweise in das elektrische Feld eines Kondensators gebracht, so ist zu beobachten, dass er in das elektrische Feld hinein gezogen wird, bis er vollständig im elektrischen Feld ist. Analoges passiert in einem inhomogenen Feld, bei dem das Dielektrikum analog zu einem Dipol in Richtung des stärkeren Feldes gezogen wird.

Um zu verstehen warum dies der Fall ist, muss die in einem Kondensator gespeicherte Energie betrachtet werden. Dabei soll davon ausgegangen werden, dass an dem Kondensator keine äußere Spannung anliegt. Diese ist durch Gleichung (2.36) gegeben.

$$E = \frac{1}{2} CU^2$$

Durch das Einschieben des Dielektrikums wird die Kapazität des Kondensators verändert (um den Faktor  $\varepsilon_r$ ) und die Spannung zwischen den Kondensatorplatten verringert.

$$\begin{aligned} C : \quad C_m &= \varepsilon_r \cdot C_0 \\ U : \quad U_m &= \frac{U_0}{\varepsilon_r} \end{aligned}$$

Wird nun für diesen Fall die Energie des Kondensators betrachtet, so ergibt sich

$$E_m = \frac{E_0}{\varepsilon_r}$$

Da  $\varepsilon_r$  in aller Regel größer Eins ist, wird also durch Einschieben eines Dielektrikums die potentielle Energie des Kondensators verringert. Diese Änderung lässt sich mathematisch folgendermaßen beschreiben:

$$-dE = F_{\perp} dz$$

Dabei ist  $z$  die Richtung, in die das Dielektrikum gezogen wird. Wird nun der Ausdruck für die potentielle Energie von oben verwendet, so ergibt sich

$$F_{\perp} dz = -d\left(\frac{1}{2} CU^2\right)$$

## 2 Elektrodynamik

Wird nun der Zusammenhang der Ladung mit der Spannung und der Kapazität (siehe Gleichung (2.27)) verwendet, ergibt sich

$$F_{\perp} dz = -d \left( \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \right)$$

Da keine äußere Spannung anliegt, bleibt die im Kondensator gespeicherte Ladung konstant. Somit kann geschrieben werden

$$F_{\perp} dz = -\frac{1}{2} Q^2 \cdot d \left( \frac{1}{C} \right)$$

Mit dem Zusammenhang

$$\begin{aligned} \frac{d}{dC} \left( -\frac{1}{C} \right) &= \frac{1}{C^2} \\ -d \left( \frac{1}{C} \right) &= \frac{1}{C^2} dC \end{aligned}$$

ergibt sich

$$F_{\perp} dz = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} dC = \frac{1}{2} U^2 dC$$

Handelt es sich bei dem Kondensator um einen Plattenkondensator handelt, so gilt für seine Kapazität Gleichung (2.28) (ggf. multipliziert mit  $\varepsilon_r$ , da ein Dielektrikum im Spiel ist). Da der Abstand  $l$  zwischen den Kondensatorplatten gleich bleibt, kann sich nur die Kondensatorquerschnittsfläche  $A$  ändern. Somit gilt

$$dC = \varepsilon_r \varepsilon_0 \cdot \frac{dA}{l}$$

Die Änderung der Fläche  $dA$  kommt dabei durch das Einschieben den Dielektrikums zustande, da ein Kondensator mit einem teilweise eingeschobenen Dielektrikum wie zwei parallel geschaltete Kondensatoren behandelt werden. Einer in dem das Dielektrikum vollständig eingeschoben ist (Kondensator "1") und einer, in dem kein Dielektrikum steckt (Kondensator "2"). Zu Beginn des Einschiebens ist die Querschnittsfläche von 1 gleich Null, da das Dielektrikum ja noch nicht im Kondensator ist. Dementsprechend ist die Querschnittsfläche von 2 einfach die komplette Querschnittsfläche des Kondensators. Durch Einschieben wird die

Fläche von 1 vergrößert ( $dA$  ist positiv) und die von 2 wird verringert ( $dA$  ist negativ). Wird nun die Änderung Gesamtkapazität des Kondensators betrachtet, so ergibt sich diese aufgrund der gedanklichen Parallelschaltung einfach als Summe der Änderungen der Kapazitäten der "Ersatzkondensatoren":

$$\begin{aligned} dC_{ges} &= dC_1 + dC_2 = \varepsilon_r \varepsilon_0 \cdot \frac{dA}{l} + \varepsilon_0 \cdot \frac{-dA}{l} \\ &= \varepsilon_r \varepsilon_0 \cdot \frac{dA}{l} - \varepsilon_0 \cdot \frac{dA}{l} \\ &= \varepsilon_0 \cdot (\varepsilon_r - 1) \cdot \frac{dA}{l} \end{aligned}$$

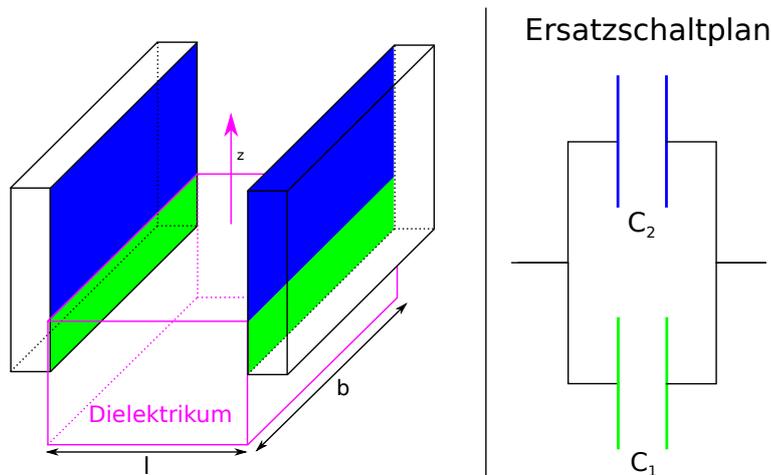


Abbildung 2.18: Einschieben eines Dielektrikums in einen Kondensator.

Wenn dieser Ausdruck für die Änderung der Gesamtkapazität nun in obige Gleichung für die Änderung der senkrechten Kraft eingesetzt wird, ergibt sich

$$F_{\perp} dz = \frac{1}{2} U^2 \varepsilon_0 \cdot (\varepsilon_r - 1) \cdot \frac{dA}{l}$$

Da die Breite  $b$  des Kondensators konstant ist, kann die Änderung der Fläche auch als Produkt der Änderung der Höhe (in diesem Fall  $dz$ ) und der Breite  $b$  ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} F_{\perp} dz &= \frac{1}{2} U^2 \varepsilon_0 \cdot (\varepsilon_r - 1) \cdot \frac{b}{l} dz \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{U}{l} \right)^2 \varepsilon_0 \cdot (\varepsilon_r - 1) \cdot b \cdot l dz \end{aligned}$$

## 2 Elektrodynamik

Nach Gleichung (2.12) ist der Quotient aus Spannung und Abstand  $l$  gleich der elektrischen Feldstärke  $E$  und das Produkt aus der Breite  $b$  und des Abstandes  $l$  ist nichts anderes, als die Querschnittsfläche  $A_Q$  des Dielektrikums. Wird nun auch wieder die Kraft pro Flächeneinheit auf das Dielektrikum betrachtet ergibt sich

$$\frac{F_{\perp}}{A_Q} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \cdot (\varepsilon_r - 1) E^2 \quad (2.50)$$

### Messung der Dielektrizitätszahl von Flüssigkeiten

Die Tatsache, dass ein Dielektrikum in ein elektrisches Feld hinein gezogen wird, kann ausgenutzt werden, um die Dielektrizitätszahl unbekannter Stoffe zu ermitteln. Dazu muss lediglich gemessen werden, mit welcher Kraft dieses Hineinziehen erfolgt.

Ein besonders einfaches Beispiel stellt dabei die Messung der Dielektrizitätszahl von Flüssigkeiten dar. Dabei wird ein Kondensator in ein flaches Becken der entsprechenden Flüssigkeit gestellt. Durch die Kraft des elektrischen Feldes beginnt die Flüssigkeit zwischen den Kondensatorplatten hoch zu fließen, bis die Kraft durch das elektrische Feld auf die Flüssigkeitssäule (das Dielektrikum) gleich groß ist, wie die Gewichtskraft.

Nun kann die Steighöhe ermittelt werden und durch entsprechende Umformungen kann dann die Dielektrizitätszahl der Flüssigkeit berechnet werden.

## 2.8 Magnetisches Feld und Induktion

Neben dem elektrischen Feld existiert noch das sogenannte **magnetische Feld**  $\vec{H}$ . Analog zum elektrischen Feld handelt es sich dabei um ein Vektorfeld, nur dass es keine Kraft auf eine statische elektrische Ladung, sondern auf einen magnetischen Dipol ausübt.

### 2.8.1 Ursache magnetischer Felder

Magnetische Felder können zum Einen von Permanentmagneten stammen, die ihre magnetische Eigenschaften aufgrund des Aufbaus ihrer Moleküle besitzen. Die magnetische Wirkung kommt dabei von dem Spin der Elektronen, sodass ein Stoff, der ungepaarte Elektronen besitzt ein magnetisches Moment aufweist. Er ist **paramagnetisch**. Hat er nur gepaarte Elektronenpaare ist er **diamagnetisch**.

Zwar erfährt ein diamagnetischer Stoff ebenfalls eine Kraft im Magnetfeld (er wird aus dem Magnetfeld heraus gedrückt), aber dieser Effekt ist so viel kleiner, als das Hineinziehen in das Magnetfeld eines paramagnetischen Stoffes, dass meist angenähert wird, dass auf einen diamagnetischen Stoff keine Kraft im Magnetfeld wirkt.

Eine weitere Ursache für ein Magnetfeld ist das Bewegen einer elektrischen Ladung (z.B. Elektronen in einem Kabel) oder aber die zeitliche Änderung eines elektrischen Feldes.

#### Magnetfeld und Pole

Ein Magnet besitzt stets einen Nord- und einen Südpol (analog zu Plus und Minus beim elektrischen Feld), wobei die Feldlinien gemäß einer Konvention stets vom Nordpol heraus und zu bzw. in den Südpol hinein fließen. Somit zeigen sie stets an, in welche Richtung sich ein magnetischer Nordpol ausrichten würde.

Wichtig ist, dass es **keine magnetischen Monopole** gibt, dh. ein Magnet besteht stets aus einem Nord- und einem Südpol. Auch ein Auftrennen führt nur zu zwei kleineren Magneten, die wieder beide beide Pole besitzen!

Da bewegte Elektronen ein Magnetfeld erzeugen, besitzt jeder stromdurchflossene Leiter ein solches Magnetfeld. Experimente zeigen, dass das Magnetfeld konzentrisch um den Leiter herum verlaufen und in sich geschlossen sind, dh. es gibt keinen physischen Nord- oder Südpol. Die Richtung der Feldlinien kann über die "Rechte-Faust-Regel" bestimmt werden. dazu wird mit dem Daumen der rechten Hand in die technische Stromrichtung (von Plus nach Minus) gezeigt. Die restlichen zur Faust gekrümmten Finger zeigen nun das Magnetfeld an.

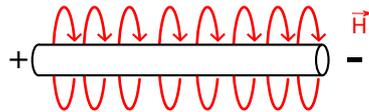


Abbildung 2.19: Magnetfeld eines Stromdurchflossenen Leiters.

Wird aus einem solchen Leiter eine Spule geformt, so überlagern sich die Magnetfelder der einzelnen Leiterschleifen so, dass in etwa das Magnetfeld eines Stabmagneten entsteht, nur dass im Innern der Spule ein homogenes Magnetfeld herrscht.

## 2.8.2 Definition des Magnetfeldes

Da im Inneren einer stromdurchflossenen Spule ein homogenes Magnetfeld herrscht, macht es Sinn selbiges auch über eine solche Spule zu definieren (Analog zur Definition des elektrischen Feldes im homogenen Feld eines Plattenkondensators).

Experimentell ergibt sich, dass die **magnetische Feldstärke**  $H$  proportional zur Stromstärke  $I$  und der Anzahl der Windungen  $n$  ist. Allerdings ist es auch antiproportional zu der Länge  $l$  der Spule, dh. wird eine bestehende Spule genommen und gestreckt, so resultiert dies bei gleichem Strom in einem kleineren Magnetfeld. Es kann auch gesagt werden, dass das Magnetfeld proportional zur Windungsdichte ist.

Der Proportionalitätsfaktor wurde einfach zu eins definiert, sodass sich folgender Zusammenhang ergibt:

$$H = I \cdot \frac{n}{l} \quad (2.51)$$

## 2.8.3 Induktion

Wird eine Spule in ein sich änderndes Magnetfeld gebracht, so ist an dieser Spule eine Spannung zu messen. Diese Spannung bleibt aber nur so lange erhalten, wie sich das Magnetfeld **zeitlich ändert**, was z.B. durch Ein- und Ausschalten oder aber in einer zeitlichen Variation der magnetischen Feldstärke gegeben ist.

Dieser Effekt wird als **Induktion** bezeichnet. Im Experiment zeigt sich eine Proportionalität der gesamten induzierten Spannung zur Gesamtänderung des Ma-

gnetfeldes  $\Delta H$ , der Windungen  $n_i$  der Spule, sowie ihrer Querschnittsfläche  $A_i$ . Die Länge der Spule spielt dagegen keine Rolle für die induzierte Spannung (solange sich die Spule komplett im Magnetfeld befindet). Somit ergibt sich das sogenannte **Induktionsgesetz**:

$$\int U_i dt = -\mu_0 n_i A_i \cdot \Delta H \quad (2.52)$$

$\mu_0$  ist dabei der Proportionalitätsfaktor, der **magnetische Feldkonstante** genannt wird, im Vakuum und beträgt

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \quad (2.53)$$

Es zeigt sich allerdings, dass auch eine Änderung der Querschnittsfläche  $dA$  der Spule eine Spannung induziert. Deswegen ist es praktischer das Induktionsgesetz differentiell zu schreiben. Außerdem wird in diesem Fall die Induktionsspannung auf eine Leiterschleife ( $n = 1$ ) statt einer Spule bezogen, sodass die Abhängigkeit der Windungen aus der Gleichung heraus fällt.

$$\begin{aligned} U_i &= -\frac{d}{dt} (\mu_0 A_i \cdot H) \\ &= -\mu_0 \cdot \left( A_i \cdot \frac{dH}{dt} + H \cdot \frac{dA_i}{dt} \right) \end{aligned}$$

### Einführung des magnetischen Flusses und der magnetischen Flussdichte

Analog zum elektrischen Fluss (siehe Gleichung (2.22)) kann an dieser Stelle der **magnetische Fluss**  $\Phi$  eingeführt werden

$$\Phi = \mu_0 \cdot A_i \cdot H \quad (2.54)$$

In der Praxis meist relevanter ist jedoch die **magnetische Flussdichte**  $\vec{B}$ , die angibt, wie hoch die magnetische Feldliniendichte (=magnetische Feldstärke) durch einen bestimmten Bereich ist. damit ist es zu vergleichen mit der Verschiebungsdichte in einem elektrischen Feld (siehe Gleichung (2.14)). Im Vakuum gilt dabei folgender Zusammenhang zwischen Magnetfeld und magnetischer Flussdichte:

$$B = \frac{\Phi}{A_i} = \mu_0 \cdot H \quad (2.55)$$

## 2 Elektrodynamik

Genauso, wie der Gauß'sche Satz besagt, dass durch eine Fläche gleich viele Feldlinien hinein wie hinaus fließen müssen (außer die Fläche umschließt eine Ladung), existiert für den magnetischen Fluss die 4. Maxwell'sche Gleichung, die besagt, dass durch eine Fläche stets gleich viele magnetische Feldlinien hinein wie hinaus fließen müssen.

$$\Phi = \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (2.56)$$

Mit Hilfe der magnetischen Flussdichte kann die differentielle Schreibweise des Induktionsgesetzes vereinfacht werden zu

$$U_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\vec{A} \cdot \frac{d\vec{B}}{dt} - \vec{B} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt} \quad (2.57)$$

In dieser Form des Induktionsgesetzes (für eine Leiterschleife) ist nun sowohl die Änderung des magnetischen Feldes, als auch die Änderung der Flächenlage der Schleife berücksichtigt.

### 2.8.4 Die zweite Maxwell'sche Gleichung

Die Spannung kann als Potentialdifferenz auch einfach als bestimmtes Integral des elektrischen Feldes ausgedrückt werden:

$$U = \Delta\varphi = -\int_{s_1}^{s_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Da eine Leiterschleife annähernd in sich geschlossen ist, kann die Spannung als das negative Kreisintegral über das elektrische Feld geschrieben werden. Somit wird aus Gleichung (2.57)

$$-\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{d\Phi}{dt}$$

Da der magnetische Fluss  $\Phi$  im Allgemeinen gegeben ist durch  $\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$ , ergibt sich aus dieser Form die **zweite Maxwell'sche Gleichung** welches die Induktion in Abhängigkeit von dem elektrischen Feld anstatt der elektrischen Spannung beschreibt:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \left( \int \vec{B} \cdot d\vec{A} \right) \quad (2.58)$$

Wie an dem Minus in dieser Gleichung zu erkennen ist, ist die induzierte Spannung stets “entgegen dem Magnetfeld gerichtet”, bzw. das durch den induzierten Strom erzeugte Magnetfeld ist dem Induktionsmagnetfeld entgegen gerichtet.

Allgemein formuliert steht also die Wirkung stets ihrer Ursache entgegen. Dieses Phänomen wird auch als **Lenz'sche Regel** bezeichnet.

### 2.8.5 Selbstinduktion

Bislang wurde die Induktion so betrachtet, dass in einer Spule durch die Änderung eines äußeren Magnetfeldes eine Spannung induziert wurde.

Allerdings erzeugt eine Spule selbst ein Magnetfeld, wenn Strom durch sie fließt und dieses Magnetfeld kann sich mit dem Strom ebenfalls ändern (im einfachsten Fall beim An-, bzw. Ausschalten des Stromes). Da die Spule logischerweise in ihrem eigenen Magnetfeld enthalten ist, kann sie einer Magnetfeldänderung ausgesetzt sein, die von ihr selbst erzeugt wurde. Dieser Effekt wird als **Selbstinduktion** bezeichnet.

Auch diese Magnetfeldänderung induziert eine Spannung innerhalb der Spule, die der von außen angelegten Spannung entgegen wirkt (Lenz'sche Regel: Die Wirkung steht ihrer Ursache entgegen).

Dies führt zum Beispiel dazu, dass in einem Stromkreis in dem eine solche Spule enthalten ist beim Einschalten nicht sofort auf die angelegte Spannung springt, da durch Selbstinduktion der Spule eine Spannung entgegen der externen Spannung hervorgerufen wird. Deswegen steigt die Spannung nur langsam auf den Wert der externen Spannungsquelle.

Analoges passiert beim Ausschalten, da hier von der Spule noch eine Spannung erzeugt wird, sodass nicht sprunghaft, sondern fließend auf Null abfällt. Umgangssprachlich formuliert “behindert” die Selbstinduktion die Änderung des elektrischen Stromes, was wiederum der Lenz'schen Regel entspricht.

Da das Magnetfeld in der Spule proportional zu den durch die Spule fließenden elektrischen Strom ist, muss auch die Änderung des Magnetfeldes proportional zur Änderung des Stromes sein. Die Änderung des Magnetfeldes ist wiederum proportional zur induzierten Spannung, sodass sich folgender Zusammenhang ergibt:

$$U_i = -L \cdot \frac{dI}{dt} \quad (2.59)$$

$L$  ist der Proportionalitätsfaktor und wird **Induktivität** genannt. Letztendlich ergibt sich  $L$  zu

$$L = \mu_0 n^2 \frac{A_i}{l} \quad (2.60)$$

Die Einheit der Induktivität ist das Henry  $H$

$$[L] = 1 \text{ H} = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{A}}$$

## 2.8.6 Energiedichte im Magnetfeld

Die elektrische Leistung in einem Stromkreis ist durch Gleichung (2.35) gegeben. Somit gilt

$$W = \int P \, dt = \int U \cdot I \, dt$$

Wird nun die Arbeit betrachtet, die durch eine induzierte Spannung  $U_i$  geleistet wird, so kann Gleichung (2.59) verwendet werden:

$$W = \int U_i \cdot I \, dt = \int L \cdot \frac{dI}{dt} \cdot I \, dt = \int L \cdot I \, dI$$

Ist nun nach der potentiellen Energie gefragt, so sind für das Integral die Grenzen Null und die Stromstärke  $I_0$  zu wählen, woraus sich die potentielle Energie einer stromdurchflossenen Spule zu folgendem Ausdruck ergibt

$$E_{pot} = \frac{1}{2} L I_0^2 \quad (2.61)$$

Wird für die Induktivität nun Gleichung (2.60) eingesetzt, so ergibt sich

$$E_{pot} = \frac{1}{2} L I_0^2 = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 \frac{A_i}{l} I_0^2$$

Wird nun die Definition der magnetischen Feldstärke (siehe Gleichung (2.51)) eingesetzt, so ergibt sich

$$E_{pot} = \frac{1}{2} \mu_0 \cdot H^2 \cdot l \cdot A_i = \frac{1}{2} \mu_0 \cdot H^2 \cdot V$$

Somit ergibt sich also ein Ausdruck für die potentielle Energie in Abhängigkeit der magnetischen Feldstärke und dem Volumen des Magnetfeldes. Daraus ergibt sich letztendlich die Energiedichte in einem magnetischen Feld:

$$\rho_m = \frac{E_{pot}}{V} = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \quad (2.62)$$

### 2.8.7 Induktion durch Lageänderung

Wie im Induktionsgesetz (siehe Gleichung (2.57)) zu sehen ist, wird eine Spannung nicht nur durch eine zeitlich Änderung des Magnetfeldes verursacht, sondern auch über eine räumliche Änderung des Flächenvektors  $\vec{A}$  der Querschnittsfläche der Leiterschleife. Das bedeutet, dass eine Bewegung der Leiterschleife (also auch ihres Querschnittsflächenvektors) durch ein Magnetfeld eine Spannung in der Spule erzeugt. Das selbe gilt auch für eine Rotation, da dies ebenfalls eine Änderung des Querschnittsflächenvektors mit sich bringt.

Im Experiment zeigt sich, dass die induzierte Spannung abhängig von der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  der Leiterschleife, sowie ihrer Länge  $\vec{l}$ .

Sei die Positionsänderung der Leiterschleife gegeben durch  $d\vec{s}$ , so ergibt sich

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} \quad ; \quad d\vec{A} = d\vec{s} \times \vec{l} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d\vec{s}}{dt} \times \vec{l} = \vec{v} \times \vec{l}$$

Wird dies in den relevanten Term des Induktionsgesetzes eingesetzt ergibt sich

$$\vec{B} \frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{B} \cdot (\vec{v} \times \vec{l}) = (\vec{B} \times \vec{v}) \cdot \vec{l} = -(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{l}$$

Nach Anwenden des zweiten Maxwell'schen Gesetzes (siehe Gleichung (2.58)) ergibt sich für das Induktionsgesetz

$$U_i = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{l} + \vec{A} \frac{d\vec{B}}{dt} \quad (2.63)$$

## 2 Elektrodynamik

In einem inhomogenen Magnetfeld muss entsprechend über  $d\vec{l}$ , bzw.  $d\vec{A}$  integriert werden.

Wird ein Leiter also durch ein konstantes Magnetfeld bewegt, so ist die induzierte Spannung proportional zur Länge des Leiters.

### 2.9 Inhomogene Magnetfelder

Analog zur Elektrik, wo das Linienintegral über das elektrische Feld eine Spannung repräsentiert ( $\int \vec{E} d\vec{s} = U$ ) kann auch ein Linienintegral der Form

$$\int \vec{H} d\vec{s}$$

aufgestellt werden. Die Frage, die sich nun stellt ist, was dieses Integral zu bedeuten hat. Aus der Einheit des Ergebnisses ( $\frac{\text{A}}{\text{m}} \cdot \text{m} = \text{A}$ ) ergibt sich, dass es sich offenbar um einen elektrischen Strom handeln muss. Allerdings geht nicht hervor, was für ein Strom das sein soll.

Weiterhin stellt sich die Frage, ob dieses Integral wie das Integral über das elektrische Feld wegunabhängig ist.

Um diese Fragen zu klären wird ein Gedankenexperiment durchgeführt: Betrachtet werden soll ein inhomogenes magnetisches Feld, wobei entlang  $k$  kleine Spulen mit der Windungszahl  $n_k$ , der Querschnittsfläche  $A_k$  und der Länge  $\Delta s_k$  aufgereiht werden sollen, wobei diese so angeordnet sind, dass die betrachtete Magnetfeldlinie stets durch die Mitte der Spulen laufen soll. Somit ist also das Magnetfeld beim Durchgang durch die Spulen annähernd homogen.

Wird nun das "Einschalten" dieses Magnetfelds betrachtet, so gilt das Induktionsgesetz (siehe Gleichung (2.52)) für jede einzelne Spule. Somit ergibt sich also

$$\int U_i dt = \sum_k \mu_0 n_k A_k \cdot \Delta H = \mu_0 \cdot \sum_k \frac{n_k}{\Delta s_k} A_k \cdot \Delta H \cdot \Delta s_k$$

Da das Magnetfeld gerade eingeschaltet wird, entspricht die Differenz des Magnetfeldes genau der magnetischen Feldstärke  $H_k$  des Magnetfeldes durch die entsprechende Spule. Außerdem soll davon ausgegangen werden, dass alle Spulen die selbe Windungsdichte  $\frac{N}{L}$  aufweisen, wobei  $L$  die Länge der kompletten Spulenreihe ist.

Des Weiteren sollen alle Spulen die selbe Querschnittsfläche  $A$  besitzen. Somit ergibt sich also

$$\int U_i dt = \mu_0 \cdot \frac{N}{L} \cdot A \cdot \sum_k H_k \cdot \Delta s_k$$

Werden nun auf der selben Strecke  $L$  mehr und mehr Spulen platziert, so wird die Länge der individuellen Spulen  $\Delta s_k$  immer kleiner. Werden unendlich viele Spulen eingesetzt, geht die Summe letztendlich in ein Integral über

$$\int U_i dt = \mu_0 \cdot \frac{N}{L} \cdot A \cdot \int \vec{H} d\vec{s}$$

Somit wurde also ein geschlossener Ausdruck für das Linienintegral über das Magnetfeld gefunden:

$$\int \vec{H} d\vec{s} = \frac{L}{\mu_0 \cdot N \cdot A} \cdot \int U_i dt \quad (2.64)$$

Damit wäre zwar rein mathematisch definiert, was das Linienintegral über das magnetische Feld ist, aber rein praktisch gesehen besitzt diese Gleichung keinerlei Anschauung.

Dazu muss weiter “experimentiert” werden. Mit einem ballistischen Galvanometer kann durch einen Spannungsstoß eine Auslenkung  $Z$  des Zeigers erzeugt werden. Dabei ist die Änderung der Auslenkung proportional zur momentan anliegenden Spannung  $U$

$$\frac{dZ}{dt} \propto U$$

Somit muss also auch der gesamte Zeigerausschlag proportional zu dem zeitlichen Integral über die Spannung sein

$$Z \propto \int U dt$$

Somit ist also ein Maß für dieses “unanschauliche” Integral gefunden worden, sodass es experimentell bestimmt werden kann. Im Folgenden soll eine qualitative Bestimmung genug sein, denn es geht nun darum zu teste, ob Gleichung (2.64) wegabhängig ist oder nicht. Dazu genügt es zu testen, ob  $\int U dt$  wegabhängig ist.

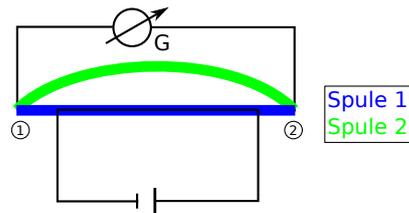


Abbildung 2.20: Aufbau zur Messung von  $\int U dt$ . Dabei wird zunächst Spule 1 angeschlossen und dann der Strom im unteren Stromkreis eingeschaltet. Anschließend wird stattdessen Spule 2 verwendet und ebenfalls der untere Stromkreis eingeschaltet. Gemessen wird dabei jeweils der Zeigerausschlag  $Z$  des Galvanometers. Wichtig dabei ist, dass es sich bei dem Teil des Stromkreises, der von Spule 1 umschlossen wird ebenfalls um eine Spule handelt.

Der Versuch wird wie in Abbildung 2.20 dargestellt durchgeführt. Der gemessene Zeigerausschlag entspricht dabei formal in beiden Fällen  $\int_1^2 U dt$ , sodass also beide Male über den selben Weg integriert wird.

Das Interessante an diesem Experiment ist nun, dass es zeigt, dass das betrachtete Integral wegabhängig ist, da im ersten Fall ein Zeigerausschlag zu beobachten ist, im Zweiten allerdings nicht. Da im betrachteten Weg, der durch die Spule führt, das Magnetfeld konstant ist, kann es vor das Integral gezogen werden. Außerdem ist bekannt, dass im Innern einer solchen Spule das Magnetfeld einer Geraden durch die Spulenmitte folgt. Da genau entlang dieser Geraden integriert wird, ergibt sich das Skalarprodukt zweier paralleler Vektoren, sodass sich einfach das Produkt der Beträge ergibt:

$$\int_1^2 \vec{H} d\vec{s} = \vec{H} \cdot \int_1^2 d\vec{s} = H \cdot \int_1^2 ds$$

Wird einmal angenommen, dass die Punkte 1 und 2 gerade den Endpunkten der Spule entsprechen, so gilt  $\int_1^2 ds = l$ , wobei  $l$  gerade die Länge der Spule ist. Durch Einsetzen der Definition der magnetischen Feldstärke (siehe Gleichung (2.51)) ergibt sich dann also

$$\int_1^2 \vec{H} d\vec{s} = H \cdot l = I \cdot \frac{n}{l} \cdot l = nI$$

Somit entspricht das betrachtete Integral also dem durch die Spule fließenden Strom multipliziert mit der Anzahl an Windungen der Spule.

Etwas nützlicher wird das Ganze, wenn ein gerader, stromdurchflossener Leiter betrachtet wird und die Spule des Messgerätes kreisförmig um diesen Leiter angeordnet ist. Somit wird in diesem Fall also das geschlossene Kreisintegral  $\oint \vec{H} \, d\vec{s}$  um den Leiter gemessen.

Dieses Experiment zeigt, dass das dieses geschlossene Kreisintegral um den Leiter stets dem durch den Leiter fließenden Strom entspricht. Dies führt dann zum **Ampère'schen Gesetz** (oder auch "Durchflutungsgesetz")

$$\oint \vec{H} \, d\vec{s} = I_{ges} \quad (2.65)$$

Anders formuliert liefert das geschlossene Wegintegral über das Magnetfeld stets den Gesamtstrom, der durch die von dem entsprechenden Weg eingeschlossene Fläche fließt. Dabei ist dann aber auch zu beachten, dass die Stromflussrichtung eine Rolle spielt. Ein geschlossenes Wegintegral um eine Fläche, in der der entsprechende Leiter hinein und hinaus geht, weißt eine Gesamtstromstärke von Null auf!

Außerdem ist das Ampère'sche Gesetz in der Praxis nur nützlich, wenn ein symmetrisches Problem betrachtet wird. Dh. also dass das Magnetfeld in jedem betrachteten Punkt gleich groß ist und somit vor das Wegintegral gezogen werden kann.

In obigem Beispiel des geraden Leiters ergibt sich somit (der betrachtete Weg ist ein Kreis mit dem Radius  $r$ )

$$I_{ges} = \oint \vec{H} \, d\vec{s} = H \cdot \oint ds = H \cdot 2\pi r$$

Werden nicht idealisierte, eindimensionale Leiter betrachtet, sondern reale Leiter mit einer Querschnittsfläche, so kann es passieren, dass das gewählte Kreisintegral innerhalb des Leiters verläuft. Ist der Strom nun nicht überall im Leiter exakt identisch, kann der durch das Durchflutungsgesetz berechnete Gesamtstrom auch als Integral über die Stromdichte  $\vec{j}$  und der betrachteten Fläche (durch das Ringintegral festgelegt) beschrieben werden:

$$I_{ges} = \oint \vec{H} \, d\vec{s} = \int \vec{j} \, d\vec{A}$$

Somit wurde das Durchflutungsgesetz auf Volumenströme erweitert.

## 2 Elektrodynamik

Wird der Fall betrachtet, dass in einem Stromkreis ein Kondensator geschaltet ist, in dem ein Dielektrikum eingeführt ist, so ändert sich an dieser Stelle die Verschiebungsdichte  $D$  (siehe Gleichung (2.13)) beim Einschalten des Stromes. Daraus ergibt sich aber seinerseits wieder ein elektrischer Strom:

$$\frac{dD}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{Q}{A} \right) = \frac{1}{A} \cdot \frac{dQ}{dt} = \frac{1}{A} \cdot I$$

Da sich die Fläche  $A$  beim Einschieben des Dielektrikums ändert, muss gelten

$$I = \int \frac{dD}{dt} dA$$

Da reale Leiter sowohl ein Volumen besitzen, durch welches der Strom fließt, als auch mehr oder weniger starke Eigenschaften eines Dielektrikums aufweisen, muss das Durchflutungsgesetz entsprechend erweitert werden. Das **1. Maxwell'sche Gesetz** macht genau das, indem es die eben gefunden Zusammenhänge kombiniert:

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = \int \vec{j} d\vec{A} + \int \frac{dD}{dt} dA \quad (2.66)$$

Dieses Gesetz erlaubt allerdings auch eine Deutung in die Andere Richtung. Da die Verschiebungsdichte mit der elektrischen Feldstärke verknüpft ist (siehe Gleichung (2.14)) bedeutet dies, dass eine zeitliche Änderung des elektrischen Feldes magnetische Wirbelströme (z.B. konzentrisch um einen Leiter) hervorruft. Die hervorgerufenen Magnetfelder stehen dabei immer senkrecht auf dem entsprechenden elektrischen Feld.

### 2.9.1 Das Biot-Savart'sche Gesetz

Beim elektrischen Feld wurde idealisiert mit Punktladungen gearbeitet, deren Feld dann als Coulombfeld (siehe Gleichung (2.16)) bezeichnet wurde.

Analog zu dieser Vorgehensweise kann auch ein Magnetfeld auf das Magnetfeld eines infinitesimal kleinen "Teilchens" zurückgeführt werden. Dazu muss zunächst ermittelt werden, was dieses "Teilchen" sein soll.

Die Antwort auf die Frage ist eigentlich recht naheliegend. Ein Magnetfeld wird durch einen elektrischen Strom (in einem Leiter) verursacht, sodass die Reduktion

auf das Magnetfeld ausgehend von einem einzigen Punkt auf den Strom durch einen einzigen Punkt des Leiters führt. Anders als beim elektrischen Feld spielt jedoch die Richtung des Stromes eine Rolle für das Magnetfeld (es ist konzentrisch um den elektrischen Strom angeordnet). Somit kann die Reduktion nicht auf einen Punkt, sondern nur auf ein infinitesimal kleines Leiterstück  $d\vec{l}$  zurückgeführt werden.

Die Tatsache, dass das Magnetfeld konzentrisch um den elektrischen Strom verläuft kann auch so formuliert werden, dass das **Magnetfeld stets senkrecht auf dem elektrischen Feld steht**, da das elektrische Feld radial von dem Leiter ausgeht (bzw. aufgrund der negativen Ladung der Elektronen radial auf den Leiter zuläuft).

Ist  $\hat{r}$  der Einheitsvektor in Richtung des Punktes, an dem das Magnetfeld bestimmt werden soll ( $\hat{r}$  steht senkrecht auf dem Leiter und ist somit parallel zum elektrischen Feld), so muss die Richtung des Magnetfeldes orthogonal zu  $\hat{r}$  sein. Im Allgemeinen muss aber  $\hat{r}$  nicht parallel zum elektrischen Feld sein, sodass sich die Richtung des Magnetfeldes aus dem Kreuzprodukt von  $d\vec{l}$  und  $\hat{r}$  ergibt.

Als letzter Punkt muss noch die Abstandsabhängigkeit des magnetischen Feldes betrachtet werden. Dabei ergibt sich eine analoge Abstandsabhängigkeit zum Coulombfeld (siehe Gleichung (2.16)), nur dass es nicht abhängig von der Dielektrizitätszahl ist.

All diese Informationen und Bedingungen vereint das **Biot-Savart'sche Gesetz**, indem es den Beitrag  $d\vec{H}$  durch ein infinitesimal kleines, stromdurchflossenes Leiterelement  $d\vec{l}$  beschreibt.

$$d\vec{H} = \frac{I \cdot (d\vec{l} \times \hat{r})}{4\pi r^2} \quad (2.67)$$

Mit Hilfe dieses Gesetzes lässt sich das Magnetfeld an einem bestimmten Punkt im Raum berechnen, ohne dass die Stromverteilung einer bestimmten Gesetzmäßigkeit (z.B. perfekt gerade, o.ä.) folgen muss. Dies geschieht dann einfach indem das Magnetfeld, welches durch jedes einzelne Stromelement erzeugt wird gemäß der Superpositionstheorie addiert wird, sodass sich das Gesamtmagnetfeld als Integral über Gleichung (2.67) ergibt.

### Magnetfeld auf der Achse einer Leiterschleife

Im Folgenden soll untersucht werden, wie sich das Magnetfeld einer Leiterschleife verhält, wenn es in einem Punkt  $P$  auf der Mittelachse der Leiterschleife betrachtet wird.

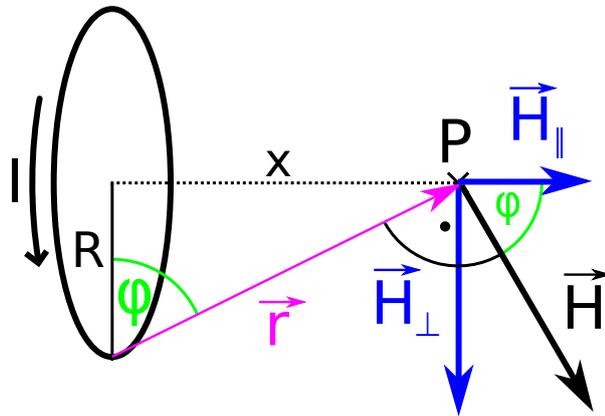


Abbildung 2.21: Skizze zum Magnetfeld auf der Achse einer Leiterschleife (in der Skizze als Kreis angenähert).

Der Betrag des gesamten Magnetfeldes  $|\vec{H}|$  kann mit Hilfe des Biot-Savart'schen Gesetzes (siehe Gleichung (2.67)) berechnet werden. Da  $\hat{r}$  und das infinitesimale Leiterstück  $d\vec{l}$  senkrecht aufeinander stehen, ergibt ihr Kreuzprodukt einfach nur das Produkt ihrer Beträge und da  $\hat{r}$  ein Einheitsvektor ist, gilt

$$dH = \frac{I}{4\pi} \cdot \frac{dl}{|\vec{r}|^2}$$

Außerdem ist aus der Vektorgeometrie folgender Zusammenhang

$$|\vec{r}| = \sqrt{R^2 + x^2}$$

Somit gilt

$$dH = \frac{I}{4\pi} \cdot \frac{dl}{R^2 + x^2}$$

Dieses Magnetfeld kann nun in einen zur Achse parallelen und senkrechten Anteil zerlegt werden. Da sich der senkrechte Anteil des Magnetfeldes beim Durchlauf

durch die komplette Schleife immer aufhebt, genügt es den zur Achse parallelen Anteil  $dH_{\parallel}$  zu betrachten. Dieser ist gegeben durch

$$\begin{aligned} dH_{\parallel} &= \cos(\varphi) \cdot dH = \frac{R}{|\vec{r}|} \cdot dH = \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}} \cdot dH \\ &= \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}} \cdot \frac{I}{4\pi} \cdot \frac{dl}{R^2 + x^2} \\ &= \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{RI \cdot dl}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Das Gesamtmagnetfeld ergibt sich dann durch das geschlossene Kreisintegral um die komplette Schleife.

$$H = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{RI}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \cdot \oint dl$$

Da das Kreisintegral über das Leiterelement gleich dem Umfang der Schleife ist, gilt für das Magnetfeld auf der Achse durch den Schleifenmittelpunkt

$$H = \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2 I}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \quad (2.68)$$

### Magnetfeld im Innern einer langen Spule

In diesem Beispiel soll das Magnetfeld einer langen, dicht gewickelten Spule bestimmt werden. Dabei werden ebenfalls nur Punkte auf der Mittelachse der Spule betrachtet.

Das Prinzip hinter dieser Herleitung ist die Zerlegung der Spule in unendlich viele Spulenteile der Länge  $dz'$  (die Zerlegung findet dabei wie das Aufschneiden einer Wurst in kleine Scheiben der Breite  $dz'$  statt). Jedes dieser kleinen Teile kann nun formal als eine individuelle Leiterschleife betrachtet werden, die ein Magnetfeld gemäß Gleichung (2.68) auf den betrachteten Punkt ausübt.

Zur Beschreibung dieses Problems wird eine Koordinatenachse  $z$  durch die Mittelachse der Spule gelegt. Das betrachtete Spulenelement sitzt dabei an der Position  $z'$  (Da die Länge  $dz'$  dieses Elementes infinitesimal ist, kann die Position trotzdem auf  $z'$  gesetzt werden). Somit hat ein Punkt an der Stelle  $z$  den Abstand  $x$

$$x = z - z'$$

## 2 Elektrodynamik

Nun muss noch heraus gefunden werden, wie groß der Strom durch das Spulenstück ist. Dazu ist von Bedeutung, dass durch eine Windung der Spule der Strom  $I$  fließt. Besitzt die Spule eine Länge  $l$  und  $n$  Windungen, so deckt ein Spulenelement der Länge  $dz'$  gerade  $\frac{n}{l} \cdot dl$  Windungen der Spule ab. Somit ist der durch diesen Spulenteil fließende Strom  $dI$  gegeben durch

$$dI = I \cdot \frac{n}{l} \cdot dz'$$

Wird dies alles in Gleichung (2.68) eingesetzt, ergibt sich der Beitrag zum Magnetfeld an dem betrachteten Punkt pro Spulenelement zu

$$dH = \frac{R^2}{2} \cdot \frac{dI}{(R^2 + (z - z')^2)^{3/2}} = \frac{R^2}{2} \cdot \frac{I \cdot \frac{n}{l} \cdot dz'}{(R^2 + (z - z')^2)^{3/2}}$$

Durch Integration von einem Spulenende bis zum Anderen ( $z_1$  bis  $z_2$ ) ergibt sich dann das tatsächliche Magnetfeld zu

$$H = \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{l} \cdot I \cdot \left( \frac{z - z_1}{\sqrt{(z - z_1)^2 + R^2}} - \frac{z - z_2}{\sqrt{(z - z_2)^2 + R^2}} \right) \quad (2.69)$$

Allerdings soll hier das Magnetfeld für den Spezialfall einer langen Spule betrachtet werden, dh der Radius  $R$  der Spule ist im Vergleich zu ihrer Länge sehr klein und kann somit vernachlässigt werden. Wenn  $R$  aus obiger Gleichung gestrichen wird, so vereinfacht sie sich enorm zu

$$H = \frac{nI}{l} \quad (2.70)$$

Wird Gleichung (2.69) genauer betrachtet, bzw. grafisch dargestellt, so zeigt sich, dass das Magnetfeld in der Spulenmitte maximal ist und an den Spulenden annähernd halb so groß, wie in der Mitte ist.

### Magnetfeld zwischen einem Helmholtz-Spulenpaar

Ein **Helmholtz-Spulenpaar** besteht aus zwei gleichen Spulen mit dem Radius  $R$  die mit der selben Orientierung mit dem Abstand  $R$  voneinander entfernt sind.

Fließt nun ein Strom durch die Spulen (gleichsinnig in beiden Spulen), so entsteht zwischen den beiden Spulen ein (annähernd) homogenes Magnetfeld.

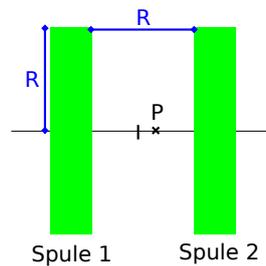


Abbildung 2.22: Schematische Darstellung eines Helmholtz-Spulenpaars.

Wie sich zeigt ergibt sich das Magnetfeld am Punkt  $P$  als die Summe der Magnetfelder der beiden Spulen, wobei diese jeweils als eine einzelne Leiterschleife betrachtet werden können, sodass sich ihr Magnetfeld (auf der Achse) mit Gleichung (2.68) berechnen lässt. Ist der Abstand des Punkts  $P$  zum Mittelpunkt zwischen den beiden Spulen  $x$ , so ist der Abstand von  $P$  zur einen Spule  $\frac{R}{2} + x$  und zur Anderen  $\frac{R}{2} - x$ . Werden beide Magnetfelder zusammenaddiert, so ergibt sich

$$H = \frac{R^2 I}{2} \cdot \left( \frac{1}{\left(R^2 + \left(\frac{R}{2} + x\right)^2\right)^{3/2}} + \frac{1}{\left(R^2 + \left(\frac{R}{2} - x\right)^2\right)^{3/2}} \right) \quad (2.71)$$

## 2.10 Kräfte im magnetischen Feld

### 2.10.1 Die Lorentzkraft

Bewegt sich ein geladenes Teilchen durch ein Magnetfeld, so wird es kontinuierlich von seiner aktuellen Flugbahn abgelenkt. Der Betrag der Geschwindigkeit bleibt dabei stets konstant. Dieses Phänomen zeigt, dass hier offensichtlich eine Kraft wirken muss, die senkrecht auf dem Geschwindigkeitsvektor stehen muss (sonst würde sich nicht nur die Richtung sondern auch der Betrag der Geschwindigkeit ändern).

Diese Kraft wird **Lorentzkraft**  $\vec{F}_L$  genannt. Sie ist abhängig von der Ladung  $q$ ,

## 2 Elektrodynamik

sowie seiner Geschwindigkeit  $\vec{v}$  und der herrschenden magnetischen Flussdichte  $\vec{B}$  (siehe Gleichung (2.55) für den Zusammenhang mit dem Magnetfeld  $\vec{h}$ ).

$$\vec{F}_L = q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (2.72)$$

Die Lorentzkraft wirkt somit stets senkrecht zur momentanen Geschwindigkeit, als auch senkrecht zu dem herrschenden Magnetfeld. Die Richtung der Kraft kann nach der Rechten-Hand-Regel bestimmt werden (was einfach der Richtung des durch das Kreuzprodukt entstehenden Vektors entspricht). Wird eine negative Ladung betrachtet, so ist  $q$  negativ und die Richtung wird genau umgekehrt (Multiplikation eines Vektors mit  $-1$ ).

Eine Auswirkung der Lorentzkraft ist der sogenannte **Halleffekt**. Dabei wird ein dreidimensionales Leiterstück (z.B. ein Quaderförmiges Metallstück) an eine Spannungsquelle angeschlossen, sodass ein Strom durch es hindurch fließt. Gleichzeitig ist dieses Leiterstück aber auch von einem homogenen, senkrechten Magnetfeld durchsetzt. Die durch das Leiterstück fließenden Elektronen erfahren also eine Ablenkung aufgrund der Lorentzkraft, was zu einer Spannung zwischen dem oberen und unteren Ende des Leiterstücks führt.

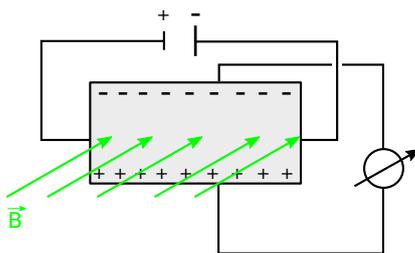


Abbildung 2.23: Skizze zum Halleffekt. Die am Spannungsmessgerät gemessene Spannung wäre unter normalen Umständen (ohne Magnetfeld) gleich Null.

Die so entstehende ‐Hallspannung‐  $U_H$  berechnet sich wie folgt

$$U_H = \frac{K_H I B}{d} \quad (2.73)$$

$K_H$  ist dabei ein material- und geometriespezifische Konstante und  $d$  die Dicke des betrachteten Leiterstücks.

Die Hallspannung stellt eine gute Möglichkeit dar, um die Stärke eines Magnetfeldes zu bestimmen.

## 2.10.2 Kräfte im homogenen Magnetfeld

### Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter im homogenen Magnetfeld

Die Lorentzkraft, wie sie in Gleichung (2.72) dargestellt ist, kann auch umgeschrieben werden, indem zunächst die Ladung  $Q$  mit Hilfe der Ladungsdichte  $\rho_Q$  beschreiben wird

$$Q = \int \rho_Q dV$$

Die Flächenstromdichte  $\vec{j} = \frac{\vec{I}}{A}$  kann seinerseits wieder folgendermaßen geschrieben werden

$$j = \frac{I}{A} = \frac{Q}{t} \cdot \frac{1}{A} = \frac{\rho_Q \cdot V}{t \cdot A} = \rho_Q \cdot v$$

Wird dies alles in Gleichung (2.72) eingesetzt, so ergibt sich (unter der Voraussetzung, dass das Magnetfeld homogen und senkrecht zur Stromflussrichtung ist)

$$\begin{aligned} F_L &= \int \rho_Q dV \cdot v \cdot B = B \cdot \int \rho_Q \cdot v dV = B \cdot \int j dV = B \cdot j \cdot \int dV \\ &= B \cdot j \cdot V = B \cdot \frac{I}{A} \cdot V \end{aligned}$$

Somit kann die Lorentzkraft auf einen Leiter der Länge  $l$  folgendermaßen berechnet werden

$$F_L = B \cdot I \cdot l \quad (2.74)$$

Wichtig hierbei ist, dass die Lorentzkraft auch “anders herum” funktioniert. Dazu muss lediglich die soeben hergeleitete Formel nach der Stromstärke aufgelöst werden und schon kann der Strom berechnet werden, der entsteht, wenn der Leiter durch ein Magnetfeld bewegt wird.

### Drehmoment auf eine stromdurchflossene Leiterschleife im homogenen Magnetfeld

Wird eine rechteckige Leiterschleife betrachtet, die stromdurchflossen in ein Magnetfeld gehalten wird, so wird festgestellt, dass in dem Fall dass die Leiterschleife

## 2 Elektrodynamik

genau senkrecht zum Magnetfeld steht, jede Seite der Leiterschleife gemäß Gleichung (2.74) eine Kraft, die stets in Richtung des Schleifeninneren (bzw. senkrecht von der Schleife weg, abhängig von der Richtung des Magnetfeldes) gerichtet ist. Da alle Kraft gleich groß sind, heben sie sich gegenseitig auf, sodass insgesamt keine Kraft auf die Leiterschleife wirkt.

Wird die Leiterschleife nun aber um den Winkel  $\varphi$  verdreht, so ändert das nichts an den seitlichen Kräften, aber die Kräfte oben und unten erzeugen nun ein Drehmoment (sie kompensieren sich aber dennoch gegenseitig, sodass keine Translation statt findet).

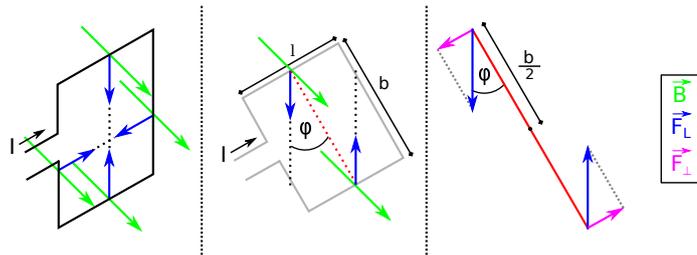


Abbildung 2.24: Ganz links: Stromdurchflossene Leiterschleife senkrecht im Magnetfeld, sodass sich alle Kräfte gegenseitig aufheben und kein Drehmoment erzeugt wird. Daneben ist der Fall einer Verdrehung der Leiterschleife zu sehen, sodass nun ein Drehmoment erzeugt wird (Der Übersichtlichkeit halber sind hier die seitlichen Kräfte nicht eingezeichnet).

Da die Kraft oben und unten gleich groß, aber entgegen gerichtet ist, ergibt sich ein Drehmoment (siehe Gleichung 1.33) von

$$M = 2F_{\perp} \cdot \frac{b}{2} = \sin(\varphi)F_L \cdot b$$

$$= \sin(\varphi) \cdot bl \cdot BI = \sin(\varphi) \cdot A \cdot BI$$

Wird das Drehmoment vektoriell betrachtet, so wird der Flächenvektor  $\vec{A} = \vec{l} \times \vec{b}$  verwendet und die Definition des Kreuzproduktes “rückwärts angewandt”, sodass sich für diesen Fall Folgendes ergibt

$$\vec{M} = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot I$$

Diese Form erinnert stark an Gleichung (2.40), die das Drehmoment eines elektrischen Dipols in einem elektrischen Feld beschreibt. Wird das **magnetische**

**Dipolmoment** folgendermaßen definiert

$$\vec{m} = I \cdot \vec{A} \quad (2.75)$$

so ergibt sich also für das Drehmoment eines magnetischen Dipols in einem Magnetfeld

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} \quad (2.76)$$

Somit ergibt sich analog zu Gleichung (2.41) bzw. (2.42)

$$E_{pot} = -W = \vec{m} \cdot \vec{B} \quad (2.77)$$

### 2.10.3 Kraft auf einen magnetischen Dipol im inhomogenen Magnetfeld

Ebenso wie bei der Arbeit, bzw. der potentiellen Energie ergibt sich die Kraft auf einen magnetischen Dipol, der in einem inhomogenen Magnetfeld ist, wirkt analog zum elektrischen Dipol im inhomogenen elektrischen Feld (siehe Gleichung (2.43)). Somit ergibt sich also

$$F_{res} = m \cdot \nabla B \quad (2.78)$$

Dabei ist  $m$  das magnetische Dipolmoment (siehe Gleichung (2.75)).

Das bedeutet dass ein magnetischer Dipol ebenfalls - abhängig von seiner Ausrichtung - in den Bereich des stärkeren Magnetfeldes hinein gezogen, bzw. aus diesem heraus geschoben wird. Es findet also analog zum elektrischen Dipol eine Translationsbewegung statt (ist der magnetische Dipol nicht (anti)parallel zu den Feldlinien findet selbstverständlich auch eine Rotation statt).

## 2.11 Materie im magnetischen Feld

Wird ein Magnetfeld in Materie betrachtet, so kann die Umrechnung zwischen magnetischem Feld und magnetischer Flussdichte nicht mehr mittels Gleichung (2.55) erfolgen, sondern es muss analog zum elektrischen Feld ein materialabhängiger "Korrekturfaktor"  $\mu_r$  eingeführt werden. Somit gilt

$$\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H} \quad (2.79)$$

In der Praxis bedeutet dies, dass in allen Gleichungen, in denen  $\mu_0$  vorkommt und das betrachtete System nicht im Vakuum (oder in der Luft) ist, auch noch ein  $\mu_r$  an entsprechender Stelle eingefügt werden muss.

### 2.11.1 Magnetisierung

Wird ein Material in ein Magnetfeld gebracht, so werden die magnetischen Dipole in ihm gemäß des äußeren Magnetfeldes ausgerichtet. Dabei spielt es keine Rolle, ob es sich dabei um permanente oder induzierte magnetische Dipole handelt. Dieser Effekt wird als **Magnetisierung**  $\vec{M}$  bezeichnet. Die Magnetisierung gibt an, wie stark die ausgebildeten magnetischen Eigenschaften eines Materials sind. Diese sind umso größer, desto mehr magnetische Dipole  $\vec{m}$  (siehe Gleichung (2.75)) pro Volumeneinheit in dem Material vorliegen. Somit beschreibt die Magnetisierung also die **magnetische Dipoldichte** in einem Material. Dies spiegelt sich auch in seiner mathematischen Definition wieder

$$\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dV} \quad (2.80)$$

Die Magnetisierung ist auch der Grund dafür, dass bei Magnetfeldern in Materien bzw. bei der Berechnung der magnetischen Flussdichte  $B$  der Korrekturfaktor  $\mu_r$  eingeführt werden muss. Die Magnetisierung kann selbst als ein Magnetfeld angesehen werden, dem eine magnetischen Flussdichte  $B = \mu_0 M$  zugeordnet werden kann. Somit ergibt sich die gesamte magnetische Flussdichte eines Magnetfeldes in Materie als

$$B_{ges} = B_{Vakuum} + B_{Magnetisierung} = \mu_0 H + \mu_0 M = \mu_0 (H + M)$$

Eine alternative Beschreibung für die gesamte magnetische Flussdichte bietet Gleichung (2.79), sodass beide gleichgesetzt werden können

$$\begin{aligned} \mu_r \mu_0 H &= \mu_0 (H + M) \\ M &= \mu_r H - H = (\mu_r - 1)H \end{aligned}$$

Somit kann die Magnetisierung auch über das herrschende Magnetfeld und der magnetischen Permeabilität der Materie  $\mu_r$  bestimmt werden. Dieser Umrechnungsfaktor zwischen Magnetfeld und Magnetisierung wird als **magnetische Suszeptibilität**  $\chi$  zusammengefasst. Im einfachsten handelt es sich bei ihr (wie bei  $\mu_r$ ) um

eine vom Magnetfeld unabhängige Konstante (Zum Beispiel bei ferromagnetischen Stoffen handelt es sich i.A. um eine Funktion in  $H$ ), die Werte zwischen  $-1$  und theoretisch Unendlich annehmen.

$$\chi = \mu_r - 1 \quad (2.81)$$

$$\vec{M} = \chi \vec{H} \quad (2.82)$$

### 2.11.2 Einteilung von Materie nach Magnetisierbarkeit

Materie kann anhand ihrer Magnetisierbarkeit, bzw. nach ihrer magnetischen Suszeptibilität in verschiedene Kategorien eingeteilt werden:

- **diamagnetisch:** Ein diamagnetischer Stoff besitzt eine magnetische Permeabilität von  $\mu_r \leq 1$  und somit eine Suszeptibilität von  $\chi \leq 0$ . Die magnetische Permeabilität ist dabei unabhängig von der Temperatur oder einem äußeren Magnetfeld  $H$ .

Ein diamagnetischer Stoff besitzt keine permanenten magnetischen Dipole, aber durch Anlegen eines äußeren Magnetfeldes werden Ringströme induziert, die wiederum magnetische Dipole hervorrufen, die gemäß der Lenz'schen Regel dem angelegten Magnetfeld entgegen wirken. Somit werden diamagnetische Stoffe aus einem äußeren Magnetfeld heraus gestoßen.

- **paramagnetisch:** Ein paramagnetischer Stoff besitzt eine magnetische Permeabilität von  $\mu_r > 1$  und somit eine Suszeptibilität von  $\chi > 0$ . Die magnetische Permeabilität ist dabei abhängig von der Temperatur aber unabhängig von einem äußeren Magnetfeld  $H$ .

Ein paramagnetischer Stoff besitzt selbst permanenten magnetische Dipole (die im Normalzustand meist ungerichtet sind, sodass von dem Stoff kein Magnetfeld ausgeht), die sich in einem äußeren Magnetfeld ausrichten können. Da dieser effekt größer ist als der Diamagnetische der stets statt findet) werden paramagnetische Stoffe in das äußere Magnetfeld hinein gezogen.

- **ferromagnetisch:** Ein paramagnetischer Stoff besitzt eine magnetische Permeabilität von  $\mu_r \gg 1$  und somit eine Suszeptibilität von  $\chi \gg 0$ . Die magnetische Permeabilität ist dabei abhängig von der Temperatur und dem äußeren Magnetfeld  $H$ .

Bei hinreichend niedriger Temperatur ist die Wechselwirkung zwischen im Material induzierten magnetischen Dipole (durch ein äußeres Feld) so groß, dass diese selbst nach Abschalten des äußeren Feldes erhalten bleiben. So können diese Stoffe als Permanentmagneten verwendet werden.

## 2.12 Wechselstromkreise

»**Wechselstrom** bezeichnet elektrischen Strom, der seine Richtung (Polung) in regelmäßiger Wiederholung ändert und bei dem sich positive und negative Augenblickswerte so ergänzen, dass der Strom im zeitlichen Mittel null ist. Abzugrenzen ist der Wechselstrom von Gleichstrom, der sich (abgesehen von Schaltvorgängen oder Einflusseffekten) zeitlich nicht ändert.«[15]

Aufgrund seiner einfachen Erzeugung werden in der Praxis meist sinusförmige Wechselströme und -spannungen verwendet, sodass sich der Strom, bzw. die Spannung zum Zeitpunkt  $t$  folgendermaßen ergibt

$$\begin{aligned} I(t) &= I_{max} \cdot \sin(\omega t + \varphi_1) \\ U(t) &= U_{max} \cdot \sin(\omega t + \varphi_2) \end{aligned} \tag{2.83}$$

Dabei ist  $\omega$  die Kreisfrequenz (die Periode der Sinus-Funktion) und  $\varphi_x$  ist die Verschiebung der Phase der jeweiligen Sinus-Funktion. Dabei sind Strom und Spannung aufgrund bestimmter Elemente im Stromkreis (z.B. Wechselstromwiderstände) oft nicht in Phase, dh.  $\varphi_1 \neq \varphi_2$ , was so viel bedeutet, als dass die Sinusfunktionen des Stromes und der Spannung gegeneinander verschoben sind.

### 2.12.1 Wechselstromgenerator

Der einfachste Wechselstromgenerator besteht aus einer rechteckigen Leiterschleife, die sich in einem konstanten Magnetfeld dreht.

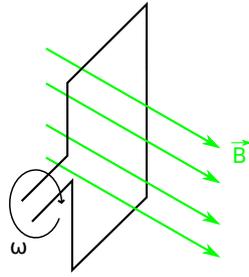


Abbildung 2.25: Schematische Darstellung eines einfachen Wechselstromgenerators

Während dieser Drehung wird gemäß Gleichung (2.57) eine Spannung induziert. Da das Magnetfeld konstant sein soll, fällt der erste Term der Gleichung heraus. Somit gilt

$$U_i(t) = -\vec{B} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt} = -\frac{d(\vec{B} \cdot \vec{A})}{dt} = -|\vec{B}| \cdot |\vec{A}| \cdot \frac{d \cos \alpha(t)}{dt}$$

Der Winkel  $\alpha$  zwischen dem Flächenvektor  $\vec{A}$  und der magnetischen Flussdichte  $\vec{B}$  ändert sich zeitlich mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  (siehe Gleichung 1.6) mit der die Schleife gedreht wird. Somit gilt  $\alpha(t) = \omega t$  (Unter der Annahme dass die beiden Vektoren zu  $t = 0$  parallel sind). Somit ergibt sich die Formel zu

$$U_i(t) = -BA \cdot \frac{d \cos(\omega t)}{dt} = BA \cdot \omega \cdot \sin(\omega t)$$

Die induzierte Spannung von  $n$  Leiterschleifen ergibt sich also zu

$$U_i(t) = nBA\omega \cdot \sin(\omega t) = U_{max} \cdot \sin(\omega t) \quad (2.84)$$

Das Schaltsymbol einer Wechselspannungsquelle ist  $\bullet \sim \bullet$

### 2.12.2 Wechselstromwiderstände

In den bisherig betrachteten Gleichstromkreisen gab es nur ohm'sche Widerstände. Spulen und Kondensatoren wiesen keinen Widerstand auf.

Dies gilt nicht mehr in Wechselstromkreisen, in denen induktive (Spulen) und kapazitive (Kondensatoren) Widerstände auftreten.

### Ohm'sche Widerstände in Wechselstromkreisen

Wird ein ohm'scher Widerstand in einen Wechselstromkreis geschaltet, so fällt an ihm gemäß dem Ohm'schen Gesetz (siehe Gleichung 2.3) eine Spannung ab. Die Stromstärke sei gegeben durch  $I(t) = I_{max} \sin \omega t$ .

$$U_R(t) = R \cdot I(t) = R \cdot I_{max} \sin(\omega t)$$

In diesem Fall beschreibt also einfach  $R$  den Zusammenhang zwischen Strom und Spannung, sodass der Widerstand im Wechselstromkreis der Selbe, wie im Gleichstromkreis ist. Außerdem findet an einem ohm'schen Widerstand keine Phasenverschiebung der Spannung statt.

Die Leistung, die an diesem Widerstand geleistet wird ist gegeben durch

$$P = U(t) \cdot I(t) = R \cdot I_{max} \sin(\omega t) \cdot I_{max} \sin \omega t = R \cdot I_{max}^2 \sin^2(\omega t)$$

Somit ist die mittlere Leistung  $\bar{P}$  gegeben durch den Mittelwert der quadrierten Sinusfunktion, der genau ein Halb beträgt. Somit gilt

$$\bar{P} = \frac{RI_{max}^2}{2} \quad (2.85)$$

Das bedeutet, dass an einem ohm'schen Widerstand im zeitlichen Mittel Arbeit geleistet wird (meist in Form von Wärme).

### Induktive Widerstände

Wird in einen Wechselstromkreis mit der Stromstärke  $I(t) = I_{max} \sin \omega t$  eine Spule mit der Induktivität  $L$  geschaltet, so wird in ihr gemäß Gleichung (2.59) aufgrund der Selbstinduktion der Spule eine Spannung (entgegen der eigentlichen Spannung) induziert. Somit gilt an der Spule

$$\begin{aligned} U(t) = -U_i(t) &= L \cdot \frac{dI(t)}{dt} = LI_{max} \cdot \frac{d \sin(\omega t)}{dt} = L\omega \cdot I_{max} \cdot \cos(\omega t) \\ &= L\omega \cdot I_{max} \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

In diesem Fall ist der Zusammenhang zwischen Spannung und Stromstärke gegeben durch  $L\omega$ . Somit ist der Widerstand in diesem Fall  $L\omega$ .

Außerdem kann hier gesehen werden, dass die Spannung der Stromstärke um  $\frac{\pi}{2}$  “voraus eilt”. Das heißt dass durch das Einbringen einer solchen Spule die Spannung und die Stromstärke nicht mehr in Phase miteinander sind.

Die an einem induktiven Widerstand anfallende Leistung ist

$$P = UI = L\omega \cdot I_{max} \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \cdot I_{max} \cdot \sin(\omega t)$$

Da der Mittelwert der Sinusfunktion stets gleich Null ist, gilt  $\bar{P} = 0$ , sodass also an einem induktiven Widerstand keine Arbeit geleistet wird.

### Kapazitive Widerstände

Wird in einen Wechselstromkreis mit der Stromstärke  $I(t) = I_{max} \sin \omega t$  ein Kondensator der Kapazität  $C$  geschaltet, so kann die Spannung an ihm über Gleichung (2.27) berechnet werden.

$$\begin{aligned} U(t) &= \frac{Q(t)}{C} = \frac{\int I(t) dt}{C} = \frac{I_{max}}{C} \cdot \int \sin(\omega t) dt \\ &= -\frac{1}{\omega C} \cdot I_{max} \cdot \cos(\omega t) = \frac{1}{\omega C} \cdot I_{max} \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Im Letzten Umformungsschritt wurde ausgenutzt, dass  $\sin(x - 0,5\pi) = -\cos(x)$  gilt.

Der Zusammenhang zwischen Spannung und Stromstärke (also der Widerstand) beträgt in diesem Fall also  $\frac{1}{\omega C}$ . Außerdem fällt auf, dass bei kapazitiven Widerständen die Spannung um  $\frac{\pi}{2}$  “nach hinten verschoben” wird, sodass sie dem Strom um eben diesen Betrag “hinterher hängt”.

Die Leistung für diesen Fall ist

$$P = UI = \frac{1}{\omega C} \cdot I_{max} \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \cdot I_{max} \sin \omega t$$

Da der Mittelwert der Sinusfunktion nach wie vor gleich Null ist gilt auch hier, dass die mittlere Leistung  $\bar{P} = 0$  ist.

### 2.12.3 Wechselstromschaltungen in der komplexen Zahlenebene

Wechselstromschaltungen sind sehr viel besser in der komplexen Zahlenebene zu beschreiben, als in der Realen. Dazu wird die Schwingung von Stromstärke und Spannung mittels Kosinus statt Sinus ausgedrückt (der einzige Unterschied der beiden Beschreibungen ist, dass der zeitliche Nullpunkt um  $\frac{\pi}{2}$  verschoben ist). Außerdem werden sowohl die Stromstärke, als auch die Spannung jeweils als komplexe Zahl betrachtet. Beispielsweise wird die Stromstärke folgendermaßen geschrieben

$$I(t) = I_{max}(\cos \omega t + i \sin(\omega t)) = I_{max}e^{i\omega t}$$

Das Selbe passiert auch mit dem Widerstand, nur dass der “komplexe Widerstand” nun **Impedanz**  $Z$  genannt wird.

$$Z = Re^{i\omega t} \quad (2.86)$$

Der Betrag der Impedanz  $|Z|$  wird als **Scheinwiderstand**, ihr Realteil  $\text{Re}(Z)$  als **Wirkwiderstand** und ihr Imaginärteil  $\text{Im}(Z)$  als **Blindwiderstand**.

Der Wirkwiderstand ist dabei der Teil der Impedanz, der keine Phasenverschiebung der Spannung mit sich bringt und ist stets positiv (er ist also das Analogon zum “klassischen Widerstand”). An einem Wirkwiderstand wird aufgrund der Tatsache, dass er als ohm’scher Widerstand beschrieben werden kann, **Leistung verrichtet**.

Der Blindwiderstand ist nun der Anteil der Impedanz, der eine Phasenverschiebung der Spannung um  $\frac{\pi}{2}$  verursacht. Er kann sowohl positiv, als auch negativ sein. An einem Scheinwiderstand wird **keine Leistung** verrichtet.

Der Scheinwiderstand ist gewissermaßen der tatsächliche Widerstand, der das Verhältnis zwischen Stromstärke und Spannung angibt.

Das bedeutet, der Widerstand eines ohm’schen Widerstands im Wechselstromkreis wie er vorher bestimmt wurde, ist ein reiner Wirkwiderstand (es findet keine Phasenverschiebung statt), wohingegen der induktive und kapazitive Widerstand beides Blindwiderstände sind (Sie bewirken nur eine Phasenverschiebung, ohne Leistung zu verrichten)

Der große Vorteil der Beschreibung in der komplexen Zahlenebene ist der, dass alle Gesetze, die für den Gleichstromkreis gelten (z.B. Berechnung des Ersatzwiderstandes) auch genauso für einen Wechselstromkreis gelten (nur dass eben mit komplexen Zahlen gerechnet wird).

### 2.12.4 Parallelschaltung von Spule und Kondensator

Im Folgenden soll eine Schaltung betrachtet werden, bei der eine Spule und ein Kondensator parallel geschaltet sind. Ein solcher Aufbau wird auch als **Schwingkreis** bezeichnet.

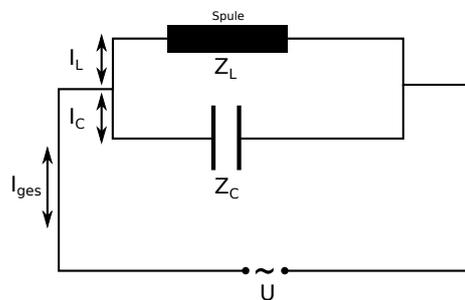


Abbildung 2.26: Beispielhafter Schaltkreis für das Parallelschalten einer Spule und eines Kondensators in einem Wechselstromkreis.

Die Gesamtimpedanz  $Z_{ges}$  ist gemäß Gleichung (2.8) gegeben durch

$$\frac{1}{Z_{ges}} = \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C}$$

Die Impedanzen einer Spule und eines Kondensators wurde bereits in den vorherigen Kapiteln ermittelt (allerdings ohne zu berücksichtigen, dass sie komplex sind), sodass sich ergibt

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z_{ges}} &= \frac{1}{iL\omega} + i\omega C = \frac{-i\omega L}{\omega^2 L^2} + i\omega C = -\frac{i}{\omega C} + i\omega C = i \left( -\frac{1}{\omega L} + \omega C \right) \\ Z_{ges} &= \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{-\frac{1}{\omega L} + \omega C} = \frac{i}{-\frac{1}{\omega L} + \omega C} \end{aligned}$$

## 2 Elektrodynamik

Es zeigt sich also, dass die Gesamtimpedanz rein imaginär ist. Der Scheinwiderstand  $Z_S$  beträgt somit

$$\begin{aligned} Z_S = |Z| &= \sqrt{(\operatorname{Re}(Z))^2 + (\operatorname{Im}(Z))^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{-\frac{1}{\omega L} + \omega C}\right)^2} = \frac{1}{-\frac{1}{\omega L} + \omega C} \\ &= \frac{\omega L}{-1 + \omega^2 LC} \end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass für die Resonanzfrequenz  $\omega_{res} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  der Scheinwiderstand unendlich groß wird. Somit fließt bei dieser Frequenz kein Gesamtstrom  $I_{ges}$  durch die Schaltung. Allerdings fließt stets ein Strom zwischen der einen Kondensatorplatte zur Anderen und dann wieder zurück, sodass innerhalb der Parallelschaltung eine Art Schwingung entsteht (die keine Energiezufuhr von außen benötigt), von der diese Schaltung auch den Namen Schwingkreis bekommen hat.

### 2.12.5 Transformator

Ein Transformator besteht aus zwei Spulen mit der Windungszahl  $n_1$  und  $n_2$ , die mittels eines Eisenkerns durch ihre Mitten miteinander “verbunden” (natürlich nicht leitend) sind.

Fließt nun durch die eine Spule ein Strom, so erzeugt dieser einen magnetischen Fluss  $\Phi$  (siehe Gleichung (2.54)) der über den Eisenkern in die zweite Spule übertragen wird. Dort erzeugt dieser gemäß Gleichung (2.57) eine Spannung. Das Verhältnis der auf der ersten Seite angelegten Spannung  $U_1$  zur induzierten Spannung  $U_2$  auf der zweiten Seite ist gegeben durch das Verhältnis der Windungszahlen der Spulen.

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad (2.87)$$

Für den induzierten Strom verhält es sich genau anders herum

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad (2.88)$$

# 3 Schwingungen

Eine **Schwingung** ist ein lokaler, periodischer Vorgang. Dh alles was sich bei Betrachtung eines einzigen Punktes wiederholt ist eine Schwingung.

## 3.1 Allgemeines

Die Voraussetzung für eine Schwingung ist ein schwingungsfähiges System, dh ein System dem es möglich ist aus seinem Grundzustand (Gleichgewichtszustand) ausgelenkt zu werden und welches dann eine Rückstellkraft aufweist, die es wieder zurück in den Grundzustand treibt.

Die Art der Schwingung kann dabei ganz verschiedene Formen annehmen, wobei eine periodische Schwingung stets eine Periodendauer  $T$  aufweist, sodass für die mathematische Beschreibung  $q$  gilt  $q(t) = q(t + T)$ .

Ein besonderer Fall von Schwingungen ist die sogenannte **harmonische Schwingung**, die sinusartiges Verhalten aufweist. Alle nicht-harmonischen Schwingungen (z.B. eine Dreiecksschwingung) kann trotzdem als unendliche Summe aus Sinus- und Kosinusfunktionen beschrieben werden (Fourier-Analyse).

## 3.2 Freier harmonischer Oszillator

### 3.2.1 Mathematische Formulierung

Eine **freie Schwingung** ist eine Schwingung, die zum Zeitpunkt  $t = 0$  angestoßen wird und anschließend sich selbst überlassen wird.

### 3 Schwingungen

Die allgemeine Formulierung einer harmonischen Schwingung  $q$  ist gegeben durch

$$q(t) = A \cdot \cos(\omega t - \varphi) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) \quad (3.1)$$

Dabei ist  $A$  die **Amplitude**, also die maximale Auslenkung, der Schwingung.  $\varphi$  stellt eine Phasenverschiebung der Kosinusfunktion dar, für den Fall, dass der Anfangswert von  $A \cos(0) = A$  abweicht. Die zweite Formulierung der allgemeinen harmonischen Schwingung ergibt sich unter Anwendung des Winkeladditionstheorems für die Kosinusfunktion  $\cos(a \pm b) = \cos(a) \cos(b) \mp \sin(a) \sin(b)$ , sodass sich für die Koeffizienten  $a = \frac{\cos(\varphi)}{A}$  und  $b = \frac{\sin(\varphi)}{A}$  ergibt.

Alternativ kann für eine solche Schwingung auch die komplexe Schreibweise gewählt werden.

$$q(t) = A \cdot e^{i(\omega t - \varphi)} = a \cos(\omega t) + ib \sin(\omega t) \quad (3.2)$$

Dabei ist zu beachten, dass die Koeffizienten  $a$  und  $b$  nicht die selben sind, wie in Gleichung (3.1), sondern diese Form nur eine alternative Beschreibung der Schwingung ist. Auch die Ableitungen liefern unterschiedliche Ergebnisse, allerdings die selben grundlegenden Eigenschaften (in beiden Fällen gilt für die zweite Ableitung  $q''(t) = -\omega^2 q(t)$ ).

Die **Kreisfrequenz**  $\omega$  ist gegeben durch

$$\omega = 2\pi \cdot \nu \quad (3.3)$$

wobei  $\nu$  die Frequenz (Anzahl der Wiederholungen der Schwingung in einer Zeiteinheit) der Schwingung ist und selbst folgendermaßen definiert ist

$$\nu = \frac{1}{T} \quad (3.4)$$

#### 3.2.2 Dämpfung

Abseits der Theorie unterliegen freie Schwingungen immer einer **Dämpfung**, die dafür sorgt, dass die Amplitude mit der Zeit geringer wird (manchmal wird auch die Frequenz geändert), da die Energie der Schwingung kontinuierlich aufgrund der Dämpfung abnimmt. Ein Beispiel für eine solche gedämpfte Schwingung ist eine Kugel, die auf eine harte Oberfläche fällt und von dort wieder nach oben springt. Im Laufe der Zeit werden die Sprünge der Kugel immer geringer (in diesem Beispiel würde die Frequenz der Sprünge gleichzeitig zunehmen).

Letztendlich ist also die Dämpfung einer Schwingung nichts anderes als der Reibungseffekt bei einer Translationsbewegung und tatsächlich werden Dämpfungen auch durch Reibungseffekte erzeugt.

Dabei werden verschiedene Abhängigkeiten der Dämpfung von der Geschwindigkeit (bzw. Frequenz) unterschieden, die alle zu einer charakteristischen Differentialgleichung für die Beschreibung der Bewegung, bzw. der Schwingung führen.

Im einfachsten Fall ist die Dämpfung proportional zur Geschwindigkeit, wie beispielsweise der Fall, dass die Amplitude einer Schwingung mit der Zeit exponentiell abnimmt. Mathematisch ließe sich dieser Fall einfach durch die Skalierung von Gleichung (3.1) mit einer e-Funktion erreichen

$$q(t) = A \cdot e^{-\delta t} \cdot \cos(\omega t - \varphi)$$

Das  $\delta$  im Exponenten wird dabei als **Dämpfungskonstante** bezeichnet und ist definiert durch

$$\delta = \frac{1}{\tau} \quad (3.5)$$

$\tau$  wiederum ist die sogenannte **Abklingzeit**, die in diesem Fall angibt, in welcher Zeit die Amplitude der Schwingung um den Faktor  $\frac{1}{e}$  abnimmt (Wäre eine andere Basis, als  $e$  gewählt worden, stände diese natürlich als Nenner im Bruch).

Ist stattdessen danach gefragt, um welchen Faktor die Amplitude von einer Periode auf die Andere abnimmt (von  $A_n$  zu  $A_{n+1}$ ), so wird das **Dämpfungsverhältnis**  $\gamma$  verwendet

$$\gamma = \frac{A_n}{A_{n+1}} \quad (3.6)$$

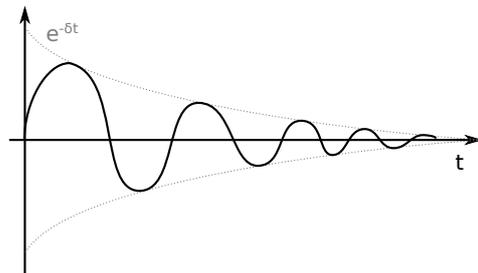


Abbildung 3.1: Skizzierter Verlauf einer gedämpften Schwingung, deren Dämpfung proportional zu  $e^{-\delta t}$  ist (ohne Phasenverschiebung).

### 3.2.3 Lineares Federpendel

Ein lineares Federpendel ist aus einem Massestück der Masse  $m$  aufgebaut, welches zwischen zwei Federn der Federhärte  $\frac{D}{2}$  eingespannt ist.

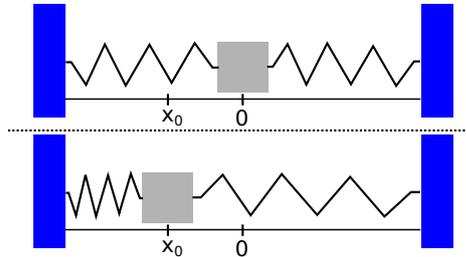


Abbildung 3.2: Schematische Darstellung eines linearen Federpendels im Gleichgewichtszustand (oben) und bei maximaler Auslenkung  $x_0$  (unten).

Dabei wird angenommen, dass sich das Massestück nur horizontal und nicht vertikal bewegt. Außerdem soll keine Dämpfung vorliegen. Es wird als der reibungsfreie Fall betrachtet.

Wird das Massestück nun um den Betrag  $x_0$  ausgelenkt und dann los gelassen, so beginnt es hin und her zu schwingen. Aber wie genau wird diese Schwingung aussehen?

Dazu muss betrachtet werden, welche Kräfte auf das Massestück wirken. Die naheliegendste Kraft, ist die Federkraft (siehe Gleichung 1.17). Wird der Nullpunkt der Auslenkung auf die Position des Massestücks im Gleichgewichtszustand gelegt, so addieren sich die Kräfte, die jede der beiden Feder auf das Massestück ausübt, sodass sich eine "effektive Federkonstante" von  $D$  ergibt.

Sobald die Federkraft auf das Massestück wirkt und dieses dadurch beschleunigt wird, wirkt gleichzeitig auch die entsprechende Trägheitskraft, sodass das System als dynamisches Gleichgewicht nach dem Prinzip von d'Alembert (siehe Gleichung 1.20) beschrieben werden kann.

$$0 = F_{Feder} + F_{Tr} = -Dx - ma = -Dx - m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$-\frac{Dx}{m} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$0 = \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{D}{m}x$$

Somit wurde eine DGL 2. Ordnung für die Position (Auslenkung) des Massestücks in Abhängigkeit der Zeit gefunden.

Für diesen einfachen Fall kann direkt erkannt werden, dass die Lösung über eine Sinus- oder Kosinusfunktion ausgedrückt werden kann. Wird der Ansatz für eine allgemein harmonische Schwingung (siehe Gleichung (3.1)) gewählt, so ergibt sich nach Einsetzen der entsprechenden Ableitung folgender Zusammenhang:

$$\begin{aligned} 0 &= -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) + \frac{D}{m} A \cos(\omega t + \varphi) \\ \omega^2 \cos(\omega t + \varphi) &= \frac{D}{m} \cos(\omega t + \varphi) \\ \omega^2 &= \frac{D}{m} \\ \omega &= \sqrt{\frac{D}{m}} \end{aligned}$$

Wird der Zeitpunkt  $t = 0$  nun so festgesetzt, dass er das Loslassen aus der vollen Auslenkung erfasst, so muss gelten (da es keinen Grund für eine Formulierung mit einer Phasenverschiebung gibt, wird  $\varphi = 0$  gesetzt)

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 = A \cos(\omega \cdot 0) \\ A &= x_0 \end{aligned}$$

Die Bewegungsgleichung für das lineare Federpendel ohne Dämpfung lautet also

$$x(t) = x_0 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t\right) \quad (3.7)$$

Wird eine energetische Betrachtung dieses Pendels durchgeführt, so wird festgestellt, dass die Gesamtenergie stets konstant ist (Energieerhaltung!), diese aber kontinuierlich zwischen potentieller Energie (Spannenergie in der Feder  $\frac{1}{2}Dx^2$ ) und kinetischer Energie des Massestücks (siehe Gleichung 1.26) wechselt, bzw. von der Einen in die Andere Form übergeht.

Die Gesamtenergie, die in dem Federpendel gespeichert ist beträgt  $\frac{1}{2}Dx_0^2$

### Lineares Federpendel mit Reibung

Wird in die Betrachtung des linearen Federpendels nun auch noch eine Reibung mit einbezogen, die in diesem Falle einmal als Proportional zur aktuellen Geschwindigkeit des Pendels sein soll, so gibt es eine zusätzliche Reibungskraft der Form

$$F_R = R \frac{dx}{dt}$$

Somit wird das dynamische Gleichgewicht folgendermaßen formuliert:

$$0 = F_{Feder} + F_R + F_{Tr}$$

Die daraus erhaltene Differentialgleichung sieht dann so aus

$$0 = \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{R}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{D}{m} x$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung lässt sich mittels des Lösungsansatzes  $x(t) = e^{\lambda t}$  in Form eines charakteristischen Polynoms lösen.

### 3.2.4 Mathematisches Pendel

Beim mathematischen Pendel handelt es sich um ein idealisiertes Fadenpendel.

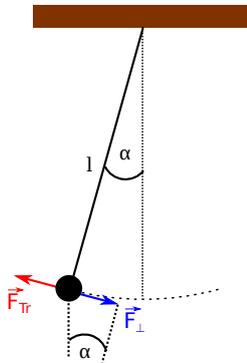


Abbildung 3.3: Skizze eines Fadenpendels.

Die rückstellende Kraft beim Fadenpendel ist der senkrecht zum Faden wirkende Teil der Gewichtskraft  $F_{\perp}$ , der gegeben ist durch

$$F_{\perp} = mg \cdot \sin(\alpha)$$

### 3.2 Freier harmonischer Oszillator

Wird das System wieder als dynamisches Gleichgewicht beschrieben, so müssen nach dem Prinzip von d'Alembert (siehe Gleichung 1.20) auch die Trägheitskraft  $F_{Tr}$  mit betrachtet werden. Es gilt also

$$0 = F_{\perp} + F_{Tr} = -mg \cdot \sin(\alpha) - ma$$

Die Tatsache, dass die Rückstellkraft ebenfalls ein negatives Vorzeichen besitzt ist damit zu begründen, dass die durch die Kräftezerlegung berechnete senkrechte Kraft, in die entgegengesetzte Richtung der Rückstellkraft zeigt (Ist beim Zeichnen des Kräfteparallelogramms sehr gut zu sehen).

Allein an dieser Form ist schon zu erkennen, dass das Verhalten eines mathematischen Pendels **unabhängig von der Masse** des Pendelkörpers ist.

Im nächsten Schritt wird die Beschleunigung  $a$  durch die Winkelbeschleunigung  $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$  ausgedrückt (siehe Gleichung 1.31)

$$a = l \cdot \frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

Insgesamt ergibt sich also folgende Differentialgleichung in  $\alpha$

$$0 = g \cdot \sin(\alpha) + l \cdot \frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

Da die DGL nicht linear ist, ist sie nicht elementar lösbar. Allerdings kann die Sinusfunktion für sehr kleine Winkel über den ersten Term ihrer Taylorreihe angenähert werden. Demnach gilt  $\sin(\alpha) \approx \alpha$ . Somit vereinfacht sich die DGL zu

$$0 = g\alpha + l \cdot \frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

Für diese DGL kann nun wieder eine trigonometrische Funktion als Lösungsfunktion angesetzt werden. Es bietet sich wieder an die allgemeine harmonische Schwingung (siehe Gleichung (3.1)) zu verwenden. Durch das Lösen der DGL wird dann folgendes Ergebnis erhalten (Achtung dieses Ergebnis gilt nur für kleine Auslenkungen  $\alpha_{max}$  des Pendels!):

$$\alpha(t) = \alpha_{max} \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t\right) \quad (3.8)$$

### 3.2.5 Physikalisches Pendel

Das Physikalische Pendel ist dem mathematischen Pendel sehr ähnlich, allerdings geht es nicht davon aus, dass die komplette schwingende Masse in einem Massenpunkt am Ende eines masselosen Fadens aufgehängt ist, sondern dass die Masse entsprechend über die komplette schwingende Komponente verteilt ist. Das kann zum Einen ein Massestück an einem massehaltigen Faden sein oder aber gar ein beliebig geformter Körper, der an einem Ende reibungsfrei aufgehängt wurde.

Der große Unterschied ist nun, dass durch die Masseverteilung nicht mehr mit einer "gekrümmten Translationsbewegung" gerechnet werden kann, sondern das Problem als eine Drehbewegung beschrieben werden muss. Das bedeutet, dass anstelle der Rückstellkraft mit dem Rückstellmoment  $M_R$  (siehe Gleichung 1.33), anstelle der Masse mit dem Trägheitsmoment (siehe Gleichung 1.37) und natürlich mit der Winkelbeschleunigung  $\frac{d^2\alpha}{dt}$  gerechnet werden muss.

Das Rückstellmoment kann glücklicherweise als Drehmoment einer Punktmasse mit der Gesamtmasse des aufgehängten Pendels in seinem Schwerpunkt bestimmt werden. Ist der Abstand vom Ursprung (der Aufhängung) zum Schwerpunkt gegeben durch  $l$  so gilt

$$M_R = l \cdot F_{\perp} = l \cdot mg \sin(\alpha)$$

Das d'Alembert'sche Prinzip (siehe Gleichung 1.20) kann auch analog für Drehbewegungen formuliert werden (mit dem Trägheitsmoment  $M_{Tr} = -JJ\frac{d^2\alpha}{dt}$  (siehe Gleichung 1.40))

$$0 = M_R - M_{Tr} = -l \cdot mg \sin(\alpha) - J\frac{d^2\alpha}{dt}$$

Analog zum mathematischen Pendel ist diese nicht-lineare DGL nicht elementar lösbar, sodass wieder die Sinus-Näherung für kleine Winkel verwendet wird, sodass sich folgende, vereinfachte DGL ergibt

$$0 = l \cdot mg \cdot \alpha + J\frac{d^2\alpha}{dt}$$

Analog zu mathematischen Pendel wird auch hier wieder die allgemeine harmonische Schwingung (siehe Gleichung (3.1)) als Lösungsfunktion angesetzt, sodass sich für das physikalische Pendel für kleine Winkel folgende Lösung ergibt:

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{mgl}{J}} \cdot t\right) \quad (3.9)$$

### Die reduzierte Pendellänge

Die **reduzierte Pendellänge** des physikalischen Pendels ist die Pendellänge eines mathematischen Pendels selber Masse, das gleich schnell schwingt.

Das bedeutet, dass das physikalische Pendel mit der Pendellänge  $l$  und das mathematische Pendel mit der reduzierten Pendellänge  $l_R$  die selbe Kreisfrequenz  $\omega$  aufweisen müssen. Diese ergibt sich durch Koeffizientenvergleich der jeweiligen Lösungsfunktion mit der allgemeinen harmonischen Schwingung.

$$\begin{aligned}\omega_{Phys} &= \omega_{Math} \\ \sqrt{\frac{mgl}{J}} &= \sqrt{\frac{g}{l_R}} \\ \frac{ml}{J} &= \frac{1}{l_R}\end{aligned}$$

Die reduzierte Pendellänge eines physikalischen Pendels ist also gegeben durch

$$l_R = \frac{J}{ml} \quad (3.10)$$

### 3.2.6 Elektrischer Schwingkreis

Ein elektrischer Schwingkreis besteht im einfachsten Fall aus einem Kondensator und einer Spule, die parallel geschaltet sind. Ggf. befindet sich noch ein ohm'scher Widerstand in der Schaltung. Er wird durch kurzes Anschließen einer externen Spannungsquelle aufgeladen und dann fließt der Strom stets von einer Kondensatorplatte zur Anderen. Dabei muss er die Spule passieren, durch deren Selbstinduktion eine Spannung in die entgegengesetzte Richtung induziert wird, sodass der Strom wieder zurück fließt. Somit entsteht also ein schwingender Stromfluss (Wechselstrom) zwischen den Kondensatorplatten.

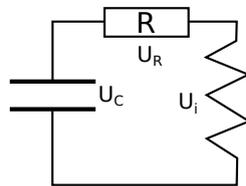


Abbildung 3.4: Skizze eines elektrischen Schwingkreises.

### 3 Schwingungen

Nach der Maschenregel, muss die Summe der einzelnen Spannungen gleich Null sein. Es gilt also

$$U_C(t) + U_R(t) + U_i(t) = 0$$

Durch Anwenden der Definition der Kapazität (siehe Gleichung (2.27)), des Widerstandes (siehe Gleichung 2.3), sowie der Selbstinduktion einer Spule (siehe Gleichung (2.59)), kann diese Gleichung umgeschrieben werden zu

$$\frac{Q(t)}{C} - RI(t) - L\frac{dI(t)}{dt} = 0$$

Die negativen Vorzeichen ergeben sich aus der Tatsache, dass die Spannung am Widerstand abfällt, bzw. aus der Lenz'schen Regel.

Im nächsten Schritt wird die Gleichung so aufgelöst, dass überall die selbe zeitabhängige Größe steht. Dazu wird ausgenutzt, dass gilt  $I(t) = \frac{dQ}{dt}$ . Allerdings muss hier auch berücksichtigt werden, dass die Änderung der Ladung  $Q$  negativ ist, da die Ladung auf dem Kondensator ja weniger wird. Wenn also mit  $Q$  nur der Betrag der Ladung gemeint ist, so muss das aus diesem Zusammenhang resultierende Minus "von Hand" mit in die Gleichung eingepflegt werden. Insgesamt ergibt sich so

$$\frac{Q(t)}{C} + R\frac{dQ(t)}{dt} + L\frac{d^2Q(t)}{dt} = 0$$

Somit wurde wieder eine homogene, lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung gefunden, die mit Hilfe des Ansatzes  $Q(t) = e^{\lambda t}$  gelöst werden kann.

Wird im idealisierten Fall angenommen, dass der Widerstand des Stromkreises gleich Null ist (also auch kein ohm'scher Widerstand eingebaut ist)[was nichts anderes bedeutet, als dass die Schwingung ungedämpft ist], so vereinfacht sich die DGL zu

$$\frac{Q(t)}{C} + L\frac{d^2Q(t)}{dt} = 0$$

Diese DGL entspricht wieder der einer ungedämpften, harmonischen Schwingung und führt zur Lösung

$$Q(t) = Q_{max} \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC}} \cdot t\right) \quad (3.11)$$

### 3.2.7 Torsionspendel

Das Torsionspendel (auch Drehpendel genannt) besteht aus einem sich drehenden Element und einer Torsionsfeder, die das drehende Element wieder in seine Gleichgewichtslage zurückführt. Es handelt sich also gewissermaßen um das Rotations-Pendant zum Federpendel. Ein Beispiel für ein solches Torsionspendel ist das sogenannte Pohl'sche Rad.

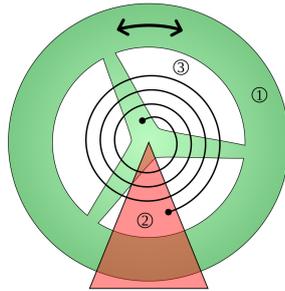


Abbildung 3.5: Schematische Darstellung eines Pohl'schen Rades bestehend aus einem Rad (1), einem Standbock (2) und einer Spiralfeder (3).

Wird das Rad um den Winkel  $\alpha$  ausgelenkt, so wirkt die Torsionsfeder mit dem Rückstellmoment  $D^*$  ein Drehmoment  $M_R$  auf das Rad aus.

$$M_R = -D^* \alpha$$

Gleichzeitig wirkt aber auch wieder ein Trägheitsmoment, das abhängig von dem Trägheitsmoment und der Winkelbeschleunigung des Rads ist.

Unter Zuhilfenahme des d'Alembert'schen Prinzips (siehe Gleichung 1.20) ergibt sich also

$$-D^* \alpha - J \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = 0$$

Aus dieser DGL ergibt sich nun wieder die Lösung einer harmonischen Schwingung

$$\alpha(t) = \alpha_{max} \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{D^*}{J}} \cdot t\right) \quad (3.12)$$

Wird nun noch eine Reibung angenommen, die proportional zur momentanen Winkelgeschwindigkeit ist, so ergibt sich eine allgemeine DGL für die gedämpf-

### 3 Schwingungen

te Schwingung der Form

$$D^* \alpha + R \frac{d\alpha}{dt} + J \frac{d^2 \alpha}{dt^2}$$

#### 3.2.8 Gedämpfte Schwingungen

Eine gedämpfte Schwingung folgt der allgemeinen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} 0 &= a \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + cy \\ &= \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{b}{a} \frac{dy}{dt} + \frac{c}{a} y \end{aligned}$$

Wie sich zeigt, können die so entstandenen Brüche durch die Dämpfungskonstante  $\delta$  und die anfängliche Kreisfrequenz  $\omega_0$  ausgedrückt werden. Im allgemeinen Fall gilt nämlich

$$\delta = \frac{b}{2c} \quad \text{und} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{a}}$$

Somit gilt für den allgemeinen Fall also folgende DGL

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\delta \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = 0 \quad (3.13)$$

Da dies stets eine lineare DGL mit konstanten Koeffizienten ist, kann sie stets über den Ansatz  $y(t) = e^{\lambda t}$  gelöst werden.  $\lambda$  kann dabei auch im Komplexen liegen. Ist dies der Fall, so ist die tatsächliche Schwingung am Ende als Realteil der Schwingungsfunktion gegeben.

Da es sich um eine DGL zweiter Ordnung handelt, wird es stets zwei Lösungen für  $\lambda$  geben, sodass die allgemeine Lösung der DGL als Linearkombination der partikulären Lösungen erhalten wird.

Der eigentlich interessante Teil beginnt beim Klassifizieren der Schwingung je nach dem Verhältnis aus Dämpfungskonstante  $\delta$  und anfänglicher Kreisfrequenz  $\omega_0$ . Dabei werden drei Fälle unterschieden, die sich alle im Diagramm ihrer Schwingung charakteristisch unterscheiden:

- Der **Schwingfall** (zu dem auch die ungedämpfte Schwingung gehört) zeichnet sich dadurch aus, dass die Dämpfungskonstante **kleiner**, als die anfängliche Kreisfrequenz ist. es gilt also  $\delta < \omega_0$ .

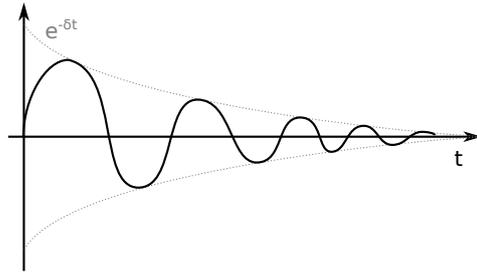


Abbildung 3.6: Skizzierter Verlauf einer gedämpften Schwingung im Schwingfall.

- Der **Kriechfall** zeichnet sich dadurch aus, dass die Dämpfungskonstante **größer**, als die anfängliche Kreisfrequenz ist. Es gilt  $\delta > \omega_0$ .

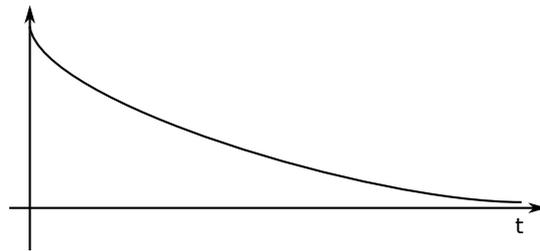


Abbildung 3.7: Skizzierter Verlauf einer Schwingung im Kriechfall.

- Der **Aperiodische Grenzfall** steht genau zwischen dem Schwing- und Kriechfall und zeichnet sich dadurch aus dass die Dämpfungskonstante **gleich** der anfänglichen Kreisfrequenz ist. Es gilt  $\delta = \omega_0$ . Beim aperiodischen Grenzfall wird die Ruhelage am schnellsten von allen drei Varianten erreicht (also auch gehalten, nicht nur passiert).

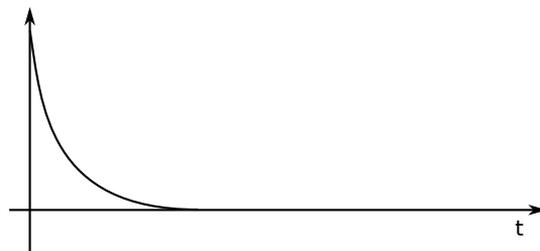


Abbildung 3.8: Skizzierter Verlauf einer gedämpften Schwingung im aperiodischen Grenzfall.

### 3.3 Erzwungene Schwingung

Bei den freien Schwingungen wurden die Schwingungen, nachdem sie erregt wurden “in Ruhe gelassen”, was dann dazu führte, dass eine Dämpfung die Schwingung über kurz oder lang zum Erliegen bringt.

Soll die Schwingung erhalten bleiben, so muss sie von außen periodisch angeregt werden (Es muss eine äußere Kraft aufgewendet werden, um die Schwingung “am Leben zu erhalten”). Eine solche Schwingung heißt dann **erzwungene Schwingung**.

Diese antreibende Kraft muss dabei ebenfalls periodisch aufgebracht werden. Dabei muss die Kreisfrequenz  $\omega_E$  nicht die selbe sein, wie die **Eigenfrequenz** des schwingenden Systems. Die Eigenfrequenz ist dabei die Kreisfrequenz, mit der die Schwingung stattfindet, wenn sie ungestört schwingen kann (als freie Schwingung).

Wird als Beispiel wieder ein Pohl’sches Rad genommen, bei welchem die Reibung berücksichtigt werden soll, so führt dieses von sich aus eine gedämpfte Schwingung aus. Wird es nun von außen mit einem Motor angetrieben, so kann dieser durch das von ihm aufgebrachte Drehmoment  $M_a$  die Schwingung im Rad erzwingen. Dabei muss dieses Drehmoment, wie oben erwähnt, ebenfalls periodisch aufgebracht werden, sodass von dem Motor folgendes Drehmoment erzeugt wird:

$$M_a(t) = M_{a,0} \cdot \cos(\omega_E t)$$

Da dieses von außen wirkende Drehmoment dem “Reibungsdrehmoment” und dem Rücksteldrehmoment der Feder entgegen wirkt (sonst würde es die Schwingung nicht anregen, sondern hemmen), muss es ein entgegengesetztes Vorzeichen zu diesen haben.

Anwendung des Prinzips von d’Alembert (siehe Gleichung 1.20) liefert hier also (an dieser Stelle wird angenommen, dass die Herleitung zum Torsionspendel noch im Gedächtnis ist)

$$\begin{aligned} 0 &= M_{Feder} + M_{Reibung} + M_{Trgheit} + M_a \\ &= -D^* \alpha - R \frac{d\alpha}{dt} - J \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + M_{a,0} \cdot \cos(\omega_E t) \\ M_{a,0} \cdot \cos(\omega_E t) &= D^* \alpha + R \frac{d\alpha}{dt} + J \frac{d^2 \alpha}{dt^2} \end{aligned}$$

Somit handelt es sich bei dieser Differentialgleichung um eine Inhomogene, mit der erzwingenden Kraft (bzw. in diesem Fall dem erzwingenden Drehmoment) als Inhomogenität. Die allgemeine Lösung dieser DGL setzt sich also aus einer Linearkombination aus der homogenen Lösung und einer partikulären Lösung zusammen.

Bei genauerer Betrachtung fällt auf, dass der homogene Teil der vorliegenden DGL der selbe, wie beim freien Pohl'schen Rad ist. Somit ist die homogene Lösung die selbe, wie die Lösung der Differentialgleichung der gedämpften Schwingung des Pohl'schen Rads. Da diese aber noch nicht bestimmt wurde, soll dies hier nachgeholt werden. Dazu wird zunächst das charakteristische Polynom der homogenen DGL gelöst.

$$0 = J\lambda^2 + R\lambda + D^*$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4JD^*}}{2J}$$

Somit lautet die allgemeine Lösung der homogenen DGL

$$\alpha(t)_{ah} = a \cdot e^{\lambda_1 t} + b \cdot e^{\lambda_2 t}$$

Für die partikuläre Lösung würde in der vorliegenden Form typischerweise der Ansatz  $A \sin(\omega_E t) + B \cos(\omega_E t)$  gewählt werden, aber das führt dann beim Lösen zu einem recht unangenehmen Gleichungssystem. Deswegen wird an dieser Stelle der Trick verwendet die DGL ins Komplexe zu transformieren, wobei der Realteil der vorliegenden "realen DGL" entsprechen soll.

Dazu definieren wir die Winkelfunktion  $\alpha(t)$  als Komplexe Funktion  $\hat{\alpha}(t)$  in der Folgenden Form:

$$\hat{\alpha}(t) = \alpha(t) + i \cdot y(t)$$

Außerdem wird das von außen wirkende Drehmoment ebenfalls komplex geschrieben:

$$\hat{M} = M_{a,0} \cdot e^{i\omega_E t}$$

Bei beiden Gleichungen entspricht also der Realteil dem, was bei dieser DGL tatsächlich interessiert. Die Umwandlung ins Komplexe dient lediglich zur Erleichterung der Berechnung, da so mit einer e-Funktion statt einer Trigonometrischen Funktion gerechnet werden kann. Somit wird nun die partikuläre Lösung folgender DGL bestimmt:

$$M_{a,0} \cdot e^{i\omega_E t} = D^* \hat{\alpha} + R \frac{d\hat{\alpha}}{dt} + J \frac{d^2 \hat{\alpha}}{dt^2}$$

### 3 Schwingungen

Die Lösung dieses Problems funktioniert über den Ansatz  $\hat{\alpha} = k e^{i\omega_E t}$  und liefert letztendlich

$$\hat{\alpha}(t) = \frac{M_{a,0}}{-J\omega^2 + D + i \cdot R\omega} \cdot e^{i\omega t}$$

Somit lautet die allgemeine Lösung der DGL also

$$\hat{\alpha}(t) = a \cdot e^{\lambda_1 t} + b \cdot e^{\lambda_2 t} + \frac{M_{a,0}}{-J\omega^2 + D + i \cdot R\omega} \cdot e^{i\omega t}$$

Um den Schwingungsvorgang nun real zu beschreiben, wird der reale Teil der komplexen Winkelfunktion (der ja nach obiger Definition genau die gesuchte Winkelfunktion ist) genutzt, aber das ist an dieser Stelle gar nicht so wichtig, da schon aus der komplexen Funktion erkennbar ist, dass eine erzwungene Schwingung **stets mit der Erregerfrequenz schwingt**. Die Schwingung findet also nicht mehr mit der Eigenfrequenz  $\omega_0$ , sondern mit  $\omega_E$  statt.

Außerdem stellt sich bei Analyse der Gleichung (dazu ist allerdings noch Einiges an Umformung nötig. dazu gibt es aber ein gutes YouTube-Video [16]) heraus, dass die Amplitude der Schwingung davon abhängt, mit welcher Frequenz der Erreger die Schwingung antreibt. Ist die Erregerfrequenz gleich der Eigenfrequenz, so wird die Amplitude maximal. Bei diesem Phänomen wird von **Resonanz** gesprochen. Alle anderen Frequenzen führen zu geringeren Amplituden und können die Schwingung sogar fast zum Erliegen bringen (wenn  $\omega_E$  sehr verschieden von  $\omega_0$  ist).

Gleichzeitig ist eine Phasendifferenz zwischen der Erregerschwingung und der betrachteten Schwingung zu beobachten. Für den Fall  $\omega_E \ll \omega_0$  sind die beiden Schwingungen in etwa in Phase, wohingegen sie sich für den Fall  $\omega_E \approx \omega_0$  um  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  und für den Fall  $\omega_E \gg \omega_0$  um  $\varphi = \pi$  unterscheiden.

## 3.4 Gekoppelte Schwingungen

Bei gekoppelten Schwingungen handelt es sich um einen Fall, in dem zwei schwingende Systeme miteinander gekoppelt sind. Das kann beispielsweise aus zwei Fadenpendeln bestehen, deren Massen mit einer Feder miteinander verbunden sind. Dabei beeinflussen sich die Schwingungen natürlich stets gegenseitig, da keine der beiden Systeme frei schwingen kann.

Die wichtigsten Grenzfälle sind dabei die folgenden:

1. **symmetrische Anregung:** Hierbei werden beide Schwingungssysteme gleich ausgelenkt. Haben nun beide Systeme die selbe Amplitude und Eigenfrequenz, so spielt die Kopplung keine Rolle in dem Sinne, als dass sich während dem Schwingungsvorgang nichts mehr an den Einzelschwingungen ändert. Die beiden Pendel schwingen also konstant in der selben Phase und mit der selben Amplitude
  
2. **Asymmetrische Anregung:** Hierbei werden die Schwingungssysteme gegensinnig angeregt. Sind die Schwingungssysteme wieder identisch, so ergibt sich ebenfalls eine durch die Kopplung zeitlich invariante Schwingung, die allerdings eine höhere Frequenz, als die entsprechende freie Schwingung aufweist, da die Kopplung hier eine zusätzliche "Rückstellkraft" aufbringt. Die beiden Schwingungen verlaufen also wieder identisch, nur dass sie um  $\pi$  phasenverschoben sind.
  
3. **Schwebungsfall:** Hierbei wird nur eines der beiden Schwingungssysteme angeregt. Durch die Kopplung wirkt aber die angeregte Schwingung als Erreger für die zweite Schwingung. Das bedeutet, dass die zweite Schwingung mit der Zeit von der Ersten angeregt wird. Da aber in das gekoppelte System keine weitere Energie von außen zugeführt wird, fehlt die übertragene Energie nun im ersten Pendel, sodass dessen Amplitude über die Zeit entsprechend abnimmt, bis es still steht. Nun wurde die gesamte Schwingungsenergie auf das zweite Pendel übertragen und die Anfangssituation kehrt sich um: Nun ist es das erste Pendel, welches vom Zweiten angeregt wird.

In diesem Fall schwingt also die Energie zwischen den beiden Pendeln hin und her, sodass sie abwechselnd still stehen und dann wieder vom jeweils Anderen angeregt werden.

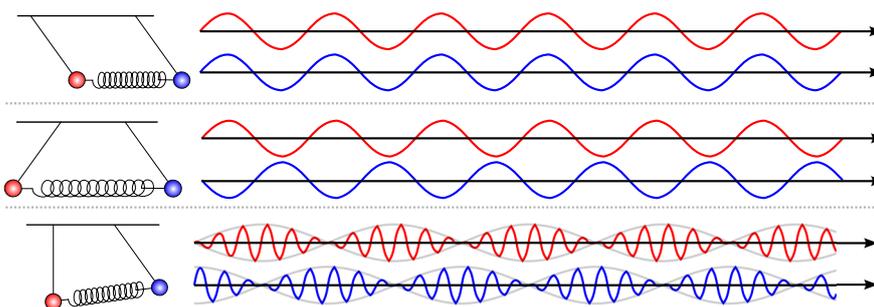


Abbildung 3.9: Schematische Darstellung der drei Grenzfälle gekoppelter Schwingung. [17]

### 3.4.1 Mathematische Beschreibung

Die mathematische Beschreibung gekoppelter Schwingung soll hier an dem Beispiel zweier identischer, gekoppelter, linearer Federpendel gezeigt werden. Die Federkonstante der beiden Pendel betrage dabei  $D_f$  und die Federkonstante der Kopplungsfeder sei  $D_k$ . Die Masse der beiden Pendel sei gegeben durch  $m$ .

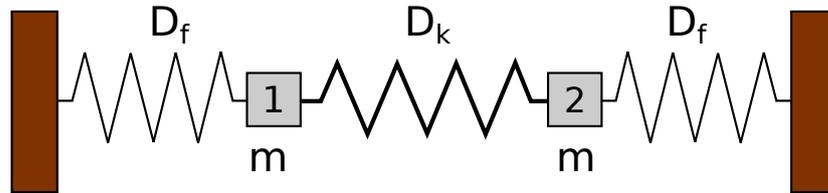


Abbildung 3.10: Zwei miteinander gekoppelte, lineare Federpendel.

Wird  $x$  als die Ortsordinate gewählt, auf der die Pendel schwingen sollen, so kann für beide Pendel eine Bewegungsdifferentialgleichung (in  $x_1$  bzw.  $x_2$ ) aufgestellt werden. Dazu wird wie immer das d'Alembertsche Prinzip (siehe Gleichung 1.20) verwendet.

Wird das erste Pendel ausgelenkt und losgelassen, so wirkt zum einen die Federkraft der Pendelfeder auf das Massestück, das es wieder zurück in die Ruheposition zieht und zum Anderen wirken die Trägheitskräfte, die ebenfalls der Bewegung selbst entgegen wirken. Bis hierhin hat die Kopplung also noch nichts geändert. Die Kopplungsfeder wirkt nun aber ebenfalls eine Kraft auf das Massestück aus. Diese Kraft ist aber auch von der momentanen Position des zweiten Pendels abhängig. Genauer gesagt ist sie abhängig von dem Abstand zwischen den beiden Pendeln.

Wird die Ruheposition der beiden Pendeln als Nullpunkt für ihre Auslenkung  $x$  festgelegt wird, so ergibt sich für das erste Pendel

$$-(-ma) + D_f x_1 + D_k(x_1 - x_2) = 0 = m \frac{d^2 x_1}{dt^2} + D_f x_1 + D_k(x_1 - x_2)$$

Für das zweite Pendel ergibt sich eine analoge Formulierung, nur dass der negative Abstand verwendet werden muss, da die "Abstandskraft" auf die beiden Pendel genau umgekehrt ist.

$$0 = m \frac{d^2 x_2}{dt^2} + D_f x_2 + D_k(x_2 - x_1)$$

### 3.4 Gekoppelte Schwingungen

Somit wurde nun ein lineares, homogenes Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung gefunden, das die Bewegung der beiden Pendel beschreibt. Zu seiner Lösung wird sich eines Tricks bedient, um die beiden DGLs zu entkoppeln. Dazu wird zunächst die Summe und einmal die Differenz der beiden DGLs gebildet:

$$\begin{aligned}
 \text{Summe:} \quad 0 &= m \left( \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{d^2 x_2}{dt^2} \right) + D_f(x_1 + x_2) + D_k(x_1 - x_2 + x_2 - x_1) \\
 &= m \left( \frac{d^2(x_1 + x_2)}{dt^2} \right) + D_f(x_1 + x_2) \\
 \text{Differenz:} \quad 0 &= m \left( \frac{d^2(x_1 - x_2)}{dt^2} \right) + D_f(x_1 - x_2) + D_k(x_1 - x_2 - (x_2 - x_1)) \\
 &= m \left( \frac{d^2(x_1 - x_2)}{dt^2} \right) + D_f(x_1 - x_2) + 2D_k(x_1 - x_2) \\
 &= m \left( \frac{d^2(x_1 - x_2)}{dt^2} \right) + (D_f + 2D_k)(x_1 - x_2)
 \end{aligned}$$

Wird nun die Substitution  $q_+ = x_1 + x_2$ , bzw.  $q_- = x_1 - x_2$  durchgeführt, ergeben sich zwei entkoppelte Differentialgleichungen in  $q_+$  und  $q_-$ .

$$\begin{aligned}
 0 &= m \frac{d^2 q_+}{dt^2} + D_f q_+ \\
 0 &= m \frac{d^2 q_-}{dt^2} + (D_f + 2D_k) q_-
 \end{aligned}$$

Die Lösungen der beiden Gleichungen ergeben sich dann zu

$$\begin{aligned}
 q_+(t) = x_1(t) + x_2(t) &= A_1 \cos\left(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t\right) + A_2 \sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t\right) \\
 q_-(t) = x_1(t) - x_2(t) &= B_1 \cos\left(\sqrt{\frac{D_f + 2D_k}{m}} \cdot t\right) + B_2 \sin\left(\sqrt{\frac{D_f + 2D_k}{m}} \cdot t\right)
 \end{aligned}$$

Wird nun angenommen, dass beide Pendel zum Zeitpunkt  $t = 0$  still stehen ( $\frac{dx_{1/2}}{dt} = 0$ ), so fällt der Sinus-Term aus der allgemeinen Lösung des DGL-Systems heraus, da dieser abgeleitet einen Kosinus ergibt, der bei Einsetzen von  $t = 0$  eine Eins liefert, was mit der Anfangsbedingung nicht überein stimmt. Es ergeben sich

### 3 Schwingungen

also die beiden Gleichungen

$$q_+(t) = x_1(t) + x_2(t) = A_1 \cos\left(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t\right)$$
$$\text{und } q_-(t) = x_1(t) - x_2(t) = B_1 \cos\left(\sqrt{\frac{D_f + 2D_k}{m}} \cdot t\right)$$

Anhand dieser Gleichung lassen sich nun wieder die eingangs erwähnten Grenzfälle diskutieren:

1. **symmetrische Anregung:** Da die beiden Pendel hier gleich ausgelenkt werden, gilt hier  $x_1(0) = x_2(0) = x_0$ . Daraus ergibt sich, dass  $q_+(0) = 2x_0 = A_1$ . Außerdem gilt  $q_-(0) = 0 = B_1$ .

Somit gilt also für die Auslenkung  $x$  der Pendel

$$x_1(t) = x_2(t) = 2x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t\right)$$

Somit ist also mathematisch bewiesen, dass in diesem Fall beide Pendel komplett identisch mit ihrer Eigenfrequenz  $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t$  schwingen. Diese gleichphasige Schwingung wird auch **1. Fundamentalschwingung** genannt.

2. **asymmetrische Anregung:** Da die beiden Pendel gegengleich ausgelenkt werden, gilt  $x_1(0) = -x_2(0) = x_0$ . Daraus folgt  $q_+(0) = 0 = A_1$  und  $q_-(0) = 2x_0 = B_1$ .

Somit gilt für die Auslenkung der beiden Pendel

$$x_1(t) = 2x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{D_f + 2D_k}{m}} \cdot t\right)$$
$$\text{und } x_2(t) = -2x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{D_f + 2D_k}{m}} \cdot t\right) = 2x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{D_f + 2D_k}{m}} \cdot t + \pi\right)$$

Somit ist mathematisch bewiesen, dass die beiden Pendel komplett identisch schwingen, aber um  $\pi$  phasenverschoben sind. Außerdem schwingen sie nicht mehr mit ihrer Eigenfrequenz  $\omega_0$ , sondern mit der Frequenz  $\omega' = \sqrt{\frac{D_f + 2D_k}{m}}$ ,

die auf jeden Fall höher als die Eigenfrequenz ist. Diese phasenverschobene Schwingung wird auch **2. Fundamentalschwingung** genannt.

3. **Schwebungsfall:** In diesem Fall gilt  $x_1(0) = 0$  und  $x_2(0) = x_0$ . Daraus folgt also  $q_+(0) = x_0 = A_1$  und  $q_-(0) = -x_0 = B_1$ . Eingesetzt ergibt sich also

$$q_+(t) = x_1(t) + x_2(t) = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t\right)$$

$$q_-(t) = x_1(t) - x_2(t) = -x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{D_f + 2D_k}{m}} \cdot t\right) = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{D_f + 2D_k}{m}} \cdot t + \pi\right)$$

Aufgelöst ergibt sich daraus

$$x_1(t) = \frac{x_0}{2} \cdot \left( \cos\left(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t\right) + \cos\left(\sqrt{\frac{D_f + 2D_k}{m}} \cdot t + \pi\right) \right)$$

bzw.

$$x_2(t) = \frac{x_0}{2} \left( \cos\left(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t\right) - \cos\left(\sqrt{\frac{D_f + 2D_k}{m}} \cdot t + \pi\right) \right)$$

Es ist also zu sehen, dass sich dieser Fall als eine symmetrische, bzw. asymmetrische Linearkombination der beiden Fundamentalschwingungen zusammensetzen lässt.

### Beliebige Anfangsbedingungen

Werden die Anfangsbedingungen anders gewählt, als die vorgestellten drei Grenzfälle, so lässt sich das Ergebnis stets als Linearkombination der Fundamentalschwingungen darstellen.

## 3.5 Schwingungen im Kontinuum

Wird ein Schwingungssystem aus  $n$  miteinander gekoppelten schwingungsfähigen Komponenten betrachtet, so ergibt sich dass jeder dieser Komponenten prinzipiell

### 3 Schwingungen

in jede der drei Raumrichtungen schwingen kann. Sie besitzen also jeweils drei Freiheitsgrade. Somit besitzt das schwingende System  $3n$  Eigenschwingungen.

Ein Beispiel für ein solches System wäre zum Beispiel eine Länge Kette an Massestücken, die mit Federn verbunden sind.

Wird nun anstelle der Federkette eine Schnur oder Saite einer Gitarre zur Schwingung angeregt, so ergibt sich, dass es für dieses System unendlich viele Eigenschwingungen gibt, wobei sich jede dieser Schwingungen in der Ausbildung einer stehenden Welle auszeichnet. Eine **stehende Welle** ist ein Zustand, bei dem das schwingende System fixe Ruhepunkte oder -flächen aufweist, die sich während der Schwingung nicht bewegen. Diese Ruhepunkte, bzw. -flächen werden **Knotenpunkte**, bzw. **Knotenflächen** genannt. Zwischen diesen Ruhebereichen befinden sich dann die Wellenberge und -täler wobei die Schwingung so stattfindet, dass sich Wellenberge in Täler und wieder zurück “verwandeln”.

Diese stehenden Wellen kommen dadurch zustande, dass die Schwingung an einem Ende angeregt wird und die dadurch entstehende Welle vom gegenüberliegenden Ende wieder reflektiert wird und zurück wandert. Somit findet eine Überlagerung der Welle mit sich selbst (bzw. ihrer Reflexion) statt.

Jeder dieser Eigenschwingungen wird eine Ordnung  $n$  zugewiesen, die durch die Anzahl der Knotenbereiche angegeben ist. Es gilt stets, dass eine Eigenschwingung der Ordnung  $n$  genau  $n + 1$  Knotenbereiche hat.

Mit der Anzahl der Knotenbereiche wächst auch die Frequenz der Schwingung, dh. eine Schwingung  $n$ -ter Ordnung hat stets eine niedrigere Frequenz, als eine Schwingung  $n + 1$ -Ordnung. Der Zuwachs der Frequenz pro Ordnungserhöhung hängt dabei von den Materialeigenschaften des schwingenden Systems ab.

## 3.6 Fourieranalyse

Bei der **Fourieranalyse** wird eine Schwingung beliebiger Art und Form in Form von Kosinus- und Sinusfunktionen ausgedrückt. Dazu wird die Schwingung  $x(t)$  als eine unendliche Reihe aus Sinus- und Kosinusfunktionen ausgedrückt:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(n\omega_0 t) + B_n \cos(n\omega_0 t)$$

Wird eine komplexe Beschreibung der Schwingung gewählt, lautet die allgemeine Fourierreihe

$$x(t) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-i \cdot n \omega_0 t}$$

$\omega_0$  ist dabei die Grundfrequenz der Schwingung.

Die dazugehörigen Fourierkoeffizienten  $A_n$  und  $B_n$  ergeben sich durch entsprechende Integration ( $T$  ist hierbei die Periode der betrachteten Schwingung mit  $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ ).

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot \sin(n\omega_0 t) dt \\ B_n &= \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot \cos(n\omega_0 t) dt \end{aligned} \quad (3.14)$$

Dabei wird die Orthogonalität der Sinus- und Kosinusfunktionen ausgenutzt. Genauere Informationen zu der Begründung, warum die Koeffizientenbestimmung so funktioniert, wie sie es tut, können dem entsprechenden YouTube-Video entnommen werden. [18]

Die Grundlage für das Funktionieren dieser Beschreibung ist die, dass nicht-harmonische Schwingungen ebenfalls eine Grundfrequenz  $\omega_0$  besitzen und dann weitere Oberfrequenzen, die aber ganzzahlige Vielfache von  $\omega_0$  sind.



## 4 Wellen

Eine **Welle** ist eine sich räumlich und zeitlich ausbreitende Schwingung, was durch die Kopplung mehrere Oszillatoren miteinander ermöglicht wird.

Sie wird charakterisiert durch ihre **Wellenlänge**  $\lambda$ , die den Abstand zwischen zwei Extrema der Welle angibt, ihrer **Phasengeschwindigkeit** (Ausbreitungsgeschwindigkeit)  $v_{Ph}$ , die angibt wie schnell sich die Welle ausbreitet. Außerdem gibt es noch den **Wellenvektor**  $\vec{k}$ , der im Normalfall die Ausbreitungsrichtung der Welle angibt. Sein Betrag ist stets  $\frac{2\pi}{\lambda}$ . Der letzte Bestandteil zur Beschreibung einer Welle ist ihre Kreisfrequenz  $\omega$ .

Eine Welle kann beispielsweise geschrieben werden als

$$\Psi(z,t) = \Psi_0 \cos(\omega t - |\vec{k}|z) \quad (4.1)$$

Wie zu erkennen ist, ist eine Welle eine dreidimensionale Funktion, die sozusagen die sich ausbreitende Schwingung am Ort  $z$  zum Zeitpunkt  $t$  beschreibt. Der Term  $|\vec{k}|z$  gibt dabei die Phasenverschiebung der Schwingung an, die dadurch entsteht, dass sich entlang der Welle vorwärts bewegt wird (räumlich) und an diesem Punkt die Schwingung noch in einer anderen Phase ist (bei konstantem Zeitpunkt  $t$ ).

Die Phasengeschwindigkeit  $v_{Ph}$  einer Welle ergibt sich als

$$v_{Ph} = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{|\vec{k}|} = \lambda \cdot \nu = \frac{\lambda}{T} \quad (4.2)$$

Sie gibt also an, wie schnell sich ein Punkt auf der Welle in die Ausbreitungsrichtung fortbewegt. Dabei ist jedoch wichtig zu beachten, dass die realen Teilchen, die als Oszillatoren für die Welle dienen, stets am gleichen Platz bleiben und nur um ihren Gleichgewichtszustand herum schwingen, sich aber nicht räumlich fortbewegen.

Prinzipiell werden zwei Arten von Wellen unterschieden:

1. **Transversalwellen:** Hierbei schwingt die Welle **senkrecht zu ihrer Ausbreitungsrichtung**. Ein Beispiel hierfür wäre ein System aus mehreren gekoppelten, linearen Federpendeln, die senkrecht angeregt werden.
2. **Longitudinalwellen:** Hierbei schwingt die Welle **parallel zu ihrer Ausbreitungsrichtung**. Ein Beispiel hierfür sind Schallwellen, die ihre Schwingung in Form von lokalisierter Kompression von Luft ausbreiten.

## 4.1 Wellengleichung

Die **Wellengleichung** ist die allgemeine Form der Beschreibung einer Welle. Dabei handelt es sich um eine Differentialgleichung, die je nach den gewählten Randbedingungen unendlich viele Lösungen haben kann. Jede dieser Lösungen wird dann eine **Wellenfunktion** oder einfach Welle genannt.

$$\frac{d^2\Psi}{dt^2} = v_{ph}^2 \cdot \vec{\nabla}^2\Psi \quad (4.3)$$

Dabei handelt es sich bei  $\vec{\nabla}^2$  um den sogenannten Laplace-Operator, der also nichts anderes ist, als der Gradientenvektor skalarmultipliziert mit sich selbst.

$$\vec{\nabla}^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \dots$$

Zwei spezielle Lösungen stellen dabei die klassischen Grenzfälle dar:

1. **Ebene Welle:** Diese Welle zeichnet sich dadurch aus, dass sie sich nur in einer Ebene ausbreitet, dh. sie breitet sich in nur eine Richtung  $z$  aus. Die allgemeine Lösung einer ebenen Welle lautet

$$\Psi(x,y,z,t) = \Psi_0 \cos(\omega t - |\vec{k}|z) \quad (4.4)$$

2. **Kugelwelle:** Dieser Wellentyp zeichnet sich durch eine gleichmäßige Ausbreitung in alle Richtungen aus, sodass sie sich gewissermaßen wie eine sich ausdehnende Kugel verhält. Ein Beispiel für eine zweidimensionale Kugelwelle ist die Wasserwelle, die entsteht wenn ein Stein in ruhendes Wasser geworfen wird. Die Welle breitet sich gleichmäßig, konzentrisch um den Einschlagpunkt aus. Sie verhält sich also wie ein sich ausdehnender Kreis (das

zweidimensionale Pendant zur Kugel). Die allgemeine Lösung einer Kugelwelle lautet

$$\begin{aligned}\Psi(x,y,z,t) &= \frac{\Psi_0}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cos\left(\omega t - |\vec{k}| \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right) \\ &= \frac{\Psi_0}{r} \cos(\omega t - |\vec{k}|r)\end{aligned}\tag{4.5}$$

## 4.2 Energieübertragung und Intensität

Eine Welle überträgt durch ihre räumliche Ausbreitung mechanische Arbeit. Dabei wird die Energie über infinitesimal kleine Massestücke  $dm$  übertragen, die alle als kleine Oszillatoren dienen, die von der Welle angeregt werden. Diese erfahren einen ständigen Wechsel an potentieller und kinetischer Energie. dabei gibt es zwei interessante Grenzfälle:

- Umkehrpunkt: Am Umkehrpunkt (also einem Extrema der Schwingung) besitzt das Massenelement seine maximale potentielle Energie (da es hier die größte Auslenkung erfährt) und keinerlei kinetischer Energie.
- Nullpunkt: Passiert das Massenelement den Nullpunkt, also seine Gleichgewichtslage, so besitzt es keinerlei potentielle Energie, dafür aber seine maximale kinetische Energie

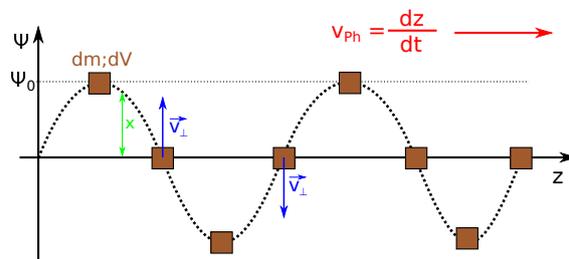


Abbildung 4.1: Momentaufnahme einer ebenen Welle (Wichtig: Dies stellt eine räumliche Darstellung der Welle zu einem fixen Zeitpunkt und keine zeitliche Schwingung eines einzelnen Oszillators dar!)

Die maximale potentielle Energie ergibt sich aus der Kraft  $F$  die während der Auslenkung wirkt und die tatsächliche Auslenkung  $x$  (siehe Gleichung 1.24)

$$E_{pot} = \int_0^{\Psi_0} F dx$$

#### 4 Wellen

Die Kraft kann nun gemäß Gleichung 1.11 ausgedrückt werden, wobei die Beschleunigung  $a$  nichts weiter, als die zweite zeitliche Ableitung des Ortes ist. Der Ort des Massenpunktes wird wiederum durch die Wellenfunktion  $\Psi$  gegeben. Wird in diesem Beispiel einmal mit einer ebenen Welle gerechnet ergibt sich so

$$\begin{aligned} E_{pot} &= \int_0^{\Psi_0} ma \, dx = \int_0^{\Psi_0} m \frac{d^2\Psi}{dt^2} \, dx \\ &= -i n t_0^{\Psi_0} m \cdot \Psi_0 \omega^2 \cos(\omega t - |\vec{k}z|) \, dx \\ &= -m \cdot \Psi_0 \omega^2 \cos(\omega t - |\vec{k}z|) \cdot \int_0^{\Psi_0} dx \\ &= -m \Psi_0^2 \omega^2 \cos(\omega t - |\vec{k}z|) \end{aligned}$$

Da bekannt ist, dass am Umkehrpunkt die potentielle Energie maximal ergibt sich die potentielle Energie am Umkehrpunkt zu (gleichzeitig wird beachtet, dass die betrachtete Masse nur infinitesimal klein ist)

$$|dE_{pot,max}| = dm \Psi_0^2 \omega^2 \quad (4.6)$$

Die maximale kinetische Energie am Nulldurchgang ergibt sich gemäß Gleichung 1.26 mit Hilfe der am Nulldurchgang vorliegenden senkrechten Geschwindigkeit  $v_{\perp}$  zu

$$dE_{kin,max} = \frac{1}{2} dm \cdot v_{\perp,max}^2$$

Der stattfindende Energiestrom äußert sich in der Änderung der Energie eines Massenelementes  $dm$  pro Zeit, da durch die Kopplung der einzelnen Massenelementen eine Änderung des Energiezustandes des einen Massenelementes auch eine Änderung des Energiezustandes des benachbarten Massenelementes verursacht.

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dV} \cdot \frac{dV}{dt} = \rho_E \cdot A \cdot \frac{dz}{dt} = \rho_E \cdot A \cdot v_{ph}$$

$A$  ist dabei die Querschnittsfläche der Welle senkrecht zur Ausbreitungsrichtung,  $dV$  ist das Volumen des Massenelementes  $dm$  und  $\rho_E$  ist die Energiedichte der Welle.

Zur besseren Vergleichbarkeit dieses Energiegehaltes einer Welle unabhängig von ihrer Querschnittsfläche wird die **Intensität**  $I$  eingeführt.

$$I = \frac{1}{A} \cdot \frac{dE}{dt} = \rho_E \cdot v_{ph} \quad (4.7)$$

Da die Energie proportional zum Quadrat der Amplitude  $\Psi_0$  der Welle ist (siehe Gleichung (4.6)), muss auch **die Intensität proportional zum Quadrat der Amplitude sein**.

Die Intensität stellt also eine zweidimensionale Energiestromdichte dar.

## 4.3 Eigenschaften von Wellen

Bisher wurden Wellen immer einzelnen, für sich und ohne räumliche Einschränkungen betrachtet. Das ist in der Realität natürlich nie der Fall, sodass es nun um Eigenschaften von Wellen gehen soll, die auftreten, wenn mehrere Wellen aufeinander treffen.

### 4.3.1 Superpositionsprinzip

»Unter Superposition, auch **Superpositionsprinzip** versteht man in der Physik eine Überlagerung gleicher physikalischer Größen, wobei sich jene nicht gegenseitig behindern.« [19]

Im konkreten Fall von Wellen bedeutet dies, dass mehrere Wellen am selben Ort existieren können, ohne dass die Welle selbst davon beeinflusst wird. Das bedeutet also dass sich mehrere Wellen an einem Ort überlagern können, ohne davon beeinflusst zu werden.

Der Punkt, an dem sich die Wellen überlagern wird aber sehr wohl davon beeinflusst, wie viele und welche Wellen sich an ihm überlagern. Ein Beispiel wäre eine Welle  $A$ , die sich von rechts nach links ausbreitet und eine Welle  $B$ , die sich von vorne nach hinten ausbreitet. Diese beiden Wellen können sich nun kreuzen, sodass sie sich am Schnittpunkt gegenseitig überlagern. An diesem Schnittpunkt liegen die beiden Wellen also in einer Superposition vor. Das resultiert dann darin, dass an diesem Schnittpunkt i.A. eine "seltsame" Schwingung hervorgerufen wird, aber die weitere Ausbreitung der beiden Wellen so geschieht, als hätten sich die beiden Wellen nie gekreuzt.

Mathematisch lässt sich die Überlagerung zweier Wellen ebenso einfach beschreiben, wie es sich mit Worten erklären lässt: Die beiden Wellen existieren beide und

## 4 Wellen

jeder der Wellen regt eine Schwingung am Punkt der Überlagerung an. Die daraus resultierende Schwingung an dem Ort ergibt sich als Summe der beiden angeregten Einzelschwingungen.

Genauso verhält es sich dann mit der gesamten Wellenfunktion:

$$\Psi_{ges} = \Psi_1 + \Psi_2 = A_1 \cos(\omega_1 t - |\vec{k}_1|z) + A_2 \cos(\omega_2 t - |\vec{k}_2|z - \delta)$$

### Überlagerung zweier Wellen mit der selben Ausbreitungsrichtung

Handelt es sich bei den sich überlagernden Wellen um Wellen gleicher Frequenz und Ausbreitungsrichtung ( $\omega_1 = \omega_2 = \omega$  und  $\vec{k}_1 = \vec{k}_2 = \vec{k}$ ), aber mit der Phasendifferenz  $\delta$ , so ergibt sich

$$\begin{aligned}\Psi_{ges} &= A_1 \cos(\omega t - |\vec{k}|z) + A_2 \cos(\omega t - |\vec{k}|z - \delta) \\ &= A_1 \cos(\omega t - |\vec{k}|z) + A_2 \cos(\delta) \cdot \cos(\omega t - |\vec{k}|z) + A_2 \sin(\delta) \cdot \sin(\omega t - |\vec{k}|z) \\ &= (A_1 + A_2 \cos(\delta)) \cdot \cos(\omega t - |\vec{k}|z) + A_2 \sin(\delta) \cdot \sin(\omega t - |\vec{k}|z)\end{aligned}$$

Hier werden also eine Kosinus- und eine Sinusfunktion gleichen Argumentes, aber unterschiedlicher Phase miteinander addiert, wofür es eine allgemeine Lösung gibt (siehe [20]), sodass also gilt (unter der Annahme, dass gilt  $\delta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ )

$$\Psi_{ges} = \sqrt{(A_1 + A_2 \cos(\delta))^2 + (A_2 \sin(\delta))^2} \cdot \sin\left(\omega t - |\vec{k}|z + \arctan\left(\frac{A_2 \sin(\delta)}{A_1 + A_2 \cos(\delta)}\right)\right)$$

Ohne weitere Berechnungen anzustellen kann aus dieser Form bereits abgelesen werden, dass die entstehende Welle eine neue Amplitude  $A_{ges}$  besitzt und eine eigene Phase  $\varepsilon$ . das bedeutet, dass allgemein geschrieben werden kann

$$\Psi_{ges} = A_{ges} \sin(\omega t - |\vec{k}|z + \varepsilon) \quad (4.8)$$

Haben die beiden Wellen die gleiche Phase, so bleibt diese bei der Überlagerung erhalten und es addieren sich nur die Amplituden.

Handelt es sich bei den Wellen um Wellen gleicher Amplitude  $A$ , aber unterschiedlicher Frequenz (es gilt also  $\omega_1 \neq \omega_2$  und  $\vec{k}_1 \neq \vec{k}_2$ ), so entsteht eine Schwebung

analog zum Schwebungszustand zweier gekoppelter Schwingungen. Diese lässt sich mathematisch folgendermaßen beschreiben:

$$\Psi_{ges} = 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta|\vec{k}|}{2}z\right) \cdot \cos(\omega_m t - k_m z) \quad (4.9)$$

Dabei ist  $\Delta\omega$  die Frequenzdifferenz und  $\Delta|\vec{k}|$  die Differenz in den Beträgen der Wellenvektoren der beiden Wellen. Außerdem gilt

$$\omega_m = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad \text{und} \quad k_m = \frac{|\vec{k}_1| + |\vec{k}_2|}{2}$$

Somit entsteht also eine Welle mit mittlerer Frequenz und Phase, deren Amplitude zeitlich ebenfalls schwingt.

### Überlagerung zweier Wellen mit entgegengesetzter Ausbreitungsrichtung

Werden zwei Wellen überlagert, die genau gleich sind, nur dass sie sich in entgegengesetzter Richtung ausbreiten (Es gilt  $|\vec{k}_1| = -|\vec{k}_2| = k$ ), so gilt folgender Zusammenhang:

$$\begin{aligned} \Psi_{ges} &= A_0 \cos(\omega t - kz) + A_0 \cos(\omega t + kz) \\ &= A_0 (\cos(\omega t) \cos(kz) + \underline{\sin(\omega t) \sin(kz)} + \cos(\omega t) \cos(kz) - \underline{\sin(\omega t) \sin(kz)}) \\ &= 2A_0 \cos(\omega t) \cos(kz) \end{aligned}$$

Aus dieser Funktion ist abzulesen, dass hier an jeder Stelle im Raum die Amplitude zeitlich konstant ist (Sie beträgt stets  $A(z) = A_0 \cos(kz)$ ), sodass sich die Welle nicht mehr zu bewegen scheint. Deshalb werden solche Wellen auch **stehende Welle** genannt. Ihre Null- oder **Knotenpunkte** befinden sich stets am gleichen Ort und weisen einen Abstand von  $\frac{\lambda}{2}$  auf.

### 4.3.2 Interferenz

Bei **Interferenz** handelt es sich um eine Superposition zweier Wellen mit der selben Frequenz, aber unterschiedlicher Phase. Es wird dabei zwischen **konstruktiver** und **destruktiver** Interferenz unterschieden. Im erstgenannten Fall verstärken

sich die überlagernden Wellen an der entsprechenden Stelle, dh. die Amplitude der resultierenden Welle an dieser Stelle ist größer, als die der ursprünglichen Wellen. Im zweiten Fall ist genau das Umgekehrte der Fall.

### 4.3.3 Dopplereffekt

Der **Dopplereffekt** beschreibt das Phänomen, dass sich die wahrgenommene Frequenz einer Welle ändert, wenn sich der Emitter und/oder der Empfänger der Welle relativ zueinander bewegen.

Das klassische Beispiel für diesen Effekt ist ein Einsatzwagen, dessen Sirene sich höhere anhört, solange er auf den Beobachter zufährt und sobald er von ihm weg fährt ist die wahrgenommene Frequenz tiefer.

Qualitativ kann das damit erklärt werden, dass durch eine relative Geschwindigkeit zwischen dem Empfänger und dem Emitter die Wellenberge etwas näher zusammen rücken. Im Fall eines sich auf den Empfänger zu bewegenden Emitter ist dies der Fall, da er sozusagen dem ersten Wellenberg "hinterherläuft" bevor er den Zweiten emittiert. Somit wurde der effektive Abstand zwischen den beiden Wellenbergen verkürzt.

Auch wenn sich der Empfänger auf den Emitter zubewegt, tritt ein Doppler-Effekt auf. Allerdings liegt das nicht an einer Änderung der Wellenlänge, da diese dadurch nicht beeinflusst wird, sondern einfach daran, dass der Empfänger die Zeitintervalle zwischen den Wellenbergen (also die Frequenz) durch seine Bewegung beeinflusst.

#### Stationärer Empfänger, bewegter Emitter

Wird angenommen, dass sich der Emitter auf der direkten Verbindungslinie zum Empfänger mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegt, so ändert sich die Wellenlänge zu

$$\lambda = \lambda_0 - vT = \lambda_0 - \frac{v}{\nu_0}$$

Dh die Wellenberge ändern ihre Distanz genau um die Strecke, die in einer Periodendauer  $T$  vom Emitter zurückgelegt wird, was dann genau  $v \cdot T$  entspricht. Bewegen sich der Emitter auf den Sender zu, so ist seine Relativgeschwindigkeit

positiv, aber die Wellenlänge muss natürlich kleiner werden. Daher kommt das Minus in obiger Gleichung.

Da sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle durch diesen Prozess nicht ändert, bleiben die Veränderung der Wellenlänge während der Ausbreitung der Welle erhalten.

Zwischen der Frequenz  $\nu$  und der Wellenlänge  $\lambda$  einer Welle herrscht ein allgemeiner Zusammenhang in Abhängigkeit von der Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  der Welle in dem entsprechenden Medium.

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \quad (4.10)$$

Eingesetzt in obige Gleichung ergibt sich

$$\lambda = \lambda_0 - \frac{v}{\frac{c}{\lambda_0}} = \lambda_0 \left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

Somit ist die Frequenz gegeben durch

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{\lambda_0 \left(1 - \frac{v}{c}\right)} = \frac{\nu_0}{1 - \frac{v}{c}}$$

Für einen bewegten Emittter der sich mit der Geschwindigkeit  $v$  auf den Empfänger zubewegt gilt also

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_0 \left(1 - \frac{v}{c}\right) \\ \nu &= \frac{\nu_0}{1 - \frac{v}{c}} \end{aligned} \quad (4.11)$$

### **Bewegter Empfänger, stationärer Emittter**

Wie eingangs bereits erwähnt, bleibt die Wellenlänge der Welle durch diesen Vorgang gleich.

Bewegt sich der Empfänger mit der Geschwindigkeit  $v$  auf der direkten Verbindungslinie zwischen Empfänger und Emittter, so ändert sich im Bezugssystem des

#### 4 Wellen

Empfängers die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle zu  $c' = c + v$ , sodass gelten muss

$$\begin{aligned}\lambda_{Empf} &= \lambda_{Emit} \\ \frac{(c + v)}{\nu} &= \frac{c}{\nu_0} \\ \nu &= \frac{(c + v)\nu_0}{c} = \nu_0 \left( \frac{c + v}{c} \right) \\ &= \nu_0 \left( 1 + \frac{v}{c} \right)\end{aligned}$$

Für einen bewegten Beobachter gilt bei der Geschwindigkeit  $v$  (positiv in Richtung des Emitters) also

$$\nu = \nu_0 \left( 1 + \frac{v}{c} \right) \quad (4.12)$$

#### **Bewegter Empfänger und bewegter Emmitter**

Bewegen sich beide Komponenten, so ergibt sich die resultierende Frequenz aus einer Kombination der beiden oberen Fälle. Dazu wird im Prinzip die letzte Herleitung nochmals gemacht, allerdings unter der Berücksichtigung, dass die Wellenlänge beim Empfänger eine andere ist, als beim Sender (siehe Gleichung (4.11)). Somit gilt also (Zur besseren Übersichtlichkeit wird hier für die Frequenz ein  $f$  verwendet)

$$\begin{aligned}\lambda &= \lambda_0 \left( 1 - \frac{v_{Emit}}{c} \right) \\ \frac{c + v_{Empf}}{f} &= \frac{c}{f_0} \left( 1 - \frac{v_{Emit}}{c} \right) \\ f &= \frac{c + v_{Empf}}{1 - \frac{v_{Emit}}{c}} \cdot \frac{f_0}{c} = f_0 \cdot \frac{c + v_{Empf}}{c - v_{Emit}}\end{aligned}$$

Und das ist dann auch schon die allgemeine Formel für den Dopplereffekt

$$f = f_0 \cdot \frac{c + v_{Empf}}{c - v_{Emit}} \quad (4.13)$$

## 4.4 Elektromagnetische Wellen - Hertz'scher Dipol

Elektromagnetische Wellen entstehen durch das Schwingen elektrischer Ladungen und können sich durch das Vakuum fortpflanzen. Das scheint auf den ersten Blick dem Prinzip einer Welle als sich räumlich ausdehnende Schwingung zu widersprechen, denn was soll denn im Vakuum (dem "Nichts") schwingen?

Die Antwort darauf ist, dass bei elektromagnetischen Wellen keine Teilchen schwingen, sondern elektrische und magnetische Felder, also Kraftfelder. Da im Vakuum trotz allem ein Raum existiert (quasi der Raum, der das Vakuum enthält) und Kraftfelder eine Eigenschaft des Raumes sind, breitet sich eine elektromagnetische Welle also nicht wirklich durch das nichts aus, sondern in Form von Kraftfeldern durch den Raum.

Dabei kommt die Tatsache zum Tragen, dass ein elektrisches Feld ein magnetisches Wirbelfeld erzeugt, welches seinerseits wieder ein elektrisches Wirbelfeld erzeugt, usw.

Eine elektromagnetische Welle besteht also aus einem schwingenden elektrischen und magnetischen Feld. Dabei stehen diese beiden Felder gemäß den Gesetzmäßigkeiten der Elektrodynamik senkrecht aufeinander. Außerdem muss es sich bei elektromagnetischen Wellen um Transversalwellen handeln.

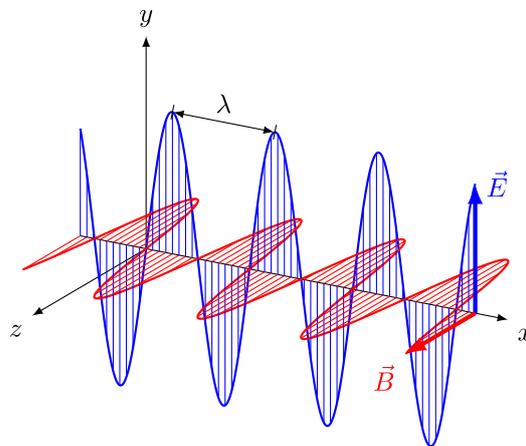


Abbildung 4.2: Darstellung einer sich in x-Richtung ausbreitenden elektromagnetischen Welle. [21]

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist dabei im Vakuum gleich der Lichtgeschwin-

digkeit (Licht ist selbst nichts Anderes als eine elektromagnetische Welle) im Vakuum

$$c = 299\,792\,458 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

### 4.4.1 Erzeugung und Nachweis elektromagnetischer Wellen

Die Erzeugung elektromagnetischer Wellen kann am Besten anhand eines **Hertz'schen Dipols** verstanden werden. Dabei handelt es sich um einen elektrischen Dipol, dessen Polarität oszilliert.

Ein einfaches Beispiel dafür ist ein gerader Metallstab (Leiter), an dem sich auf dem einen Ende ein Überschuss negativer Ladung und am anderen Ende ein entsprechend großer Überschuss positiver Ladung herrscht. Somit besitzt der Metallstab zwei räumlich voneinander getrennte Ladungsschwerpunkte. Es handelt sich also um einen Dipol.

Fangen nun die Elektronen an, von einem Ende zum Anderen zu fließen, so verkleinern sich die Ladungsschwerpunkte des Dipols und das von ihm aufgebaute elektrische Feld wird geringer, bis es letztendlich zum Ladungsausgleich kommt und das elektrische Feld gleich Null ist. Wird nun von Außen erzwungen, dass die Elektronen trotzdem weiter fließen, so lädt sich der Stab langsam wieder auf, aber diesmal mit umgekehrter Polarität. Dementsprechend baut sich auch das elektrische Feld wieder auf, aber ebenfalls in genau entgegengesetzter Richtung, wie zuvor.

Somit ist aus dem Minus- ein Plus- und aus dem Plus- ein Minuspol geworden. Die Polarität des Dipols (des Metallstabes) hat sich einmal umgekehrt. Nun kann der ganze Prozess wieder in umgekehrter Richtung statt finden, sodass sich Minus- und Pluspol periodisch vertauschen. Die Pole oszillieren (schwingen) also.

Es wurde im Kapitel Elektrodynamik gesagt, dass das elektrische Feld eine Eigenschaft des Raumes ist, was auch korrekt ist. Allerdings verbreiten sich Änderungen im elektrischen Feld (wie sie hier durch die oszillierenden Pole erschaffen werden) nicht sofort, sondern haben ihrerseits wieder eine Ausbreitungsgeschwindigkeit (Lichtgeschwindigkeit). Somit braucht es eine Weile (eine sehr kurze Weile, aber trotzdem) bis sich die Änderung des elektrischen Feldes von der Quelle (in diesem Beispiel dem Dipol) bis zu einem bestimmten Punkt im Raum ausgebreitet hat. Würde ein Schnappschuss zu einem bestimmten Zeitpunkt gemacht werden, so könnte erkannt werden, dass eine Änderung bis zu diesem Zeitpunkt nur eine

#### 4.4 Elektromagnetische Wellen - Hertz'scher Dipol

Distanz  $x$  zurück gelegt hat und alles, was weiter als  $x$  von der Quelle entfernt ist, hat von dieser Änderung noch nichts mit bekommen.

Da der Dipol sein elektrisches Feld ständig ändert, werden in einem Zeitintervall  $\Delta t$  gewissermaßen unendlich viele Änderungen des elektrischen Feldes durchgeführt, die alle mit einem infinitesimalen Zeitabstand zueinander entstanden sind. Da diese Änderungen eine endliche Zeit benötigen, um einen Punkt  $P$  im Raum zu erreichen ändert sich in  $P$  das elektrische Feld in gleicher Weise, wie am Dipol, aber mit einem zeitlichen Versatz.

Somit wurde also die im elektrischen Feld erzeugte Schwingung durch den Raum fortgepflanzt, was genau die Eigenschaft einer Welle ist. Somit wurde also eine Welle im elektrischen Feld erzeugt.

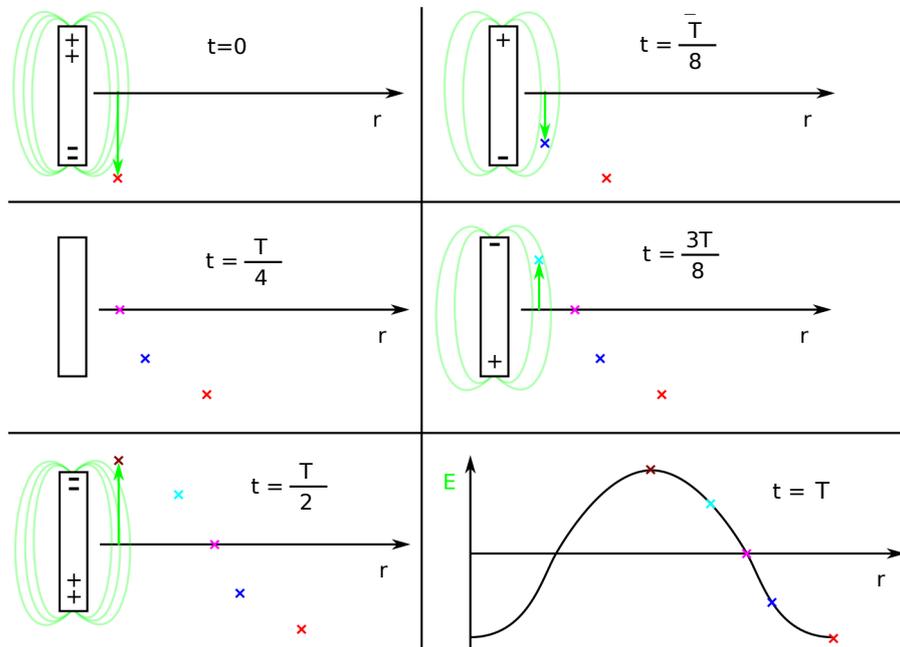


Abbildung 4.3: Schematische Darstellung der Entstehung einer "elektrischen Welle" durch einen Hertz'schen Dipol. Wichtig dabei ist zu beachten, dass die  $x$ -Achse eine Orts- und keine Zeitangabe darstellt. Von einem Schnappschuss zum nächsten, kann jedoch die räumliche Ausbreitung der einzelnen Änderungen mit der Zeit verfolgen.

Allerdings wurde eine Tatsache bis hier vernachlässigt: Jede Änderung im elektrischen Feld induziert automatisch eine Änderung im magnetischen Feld, welches

## 4 Wellen

senkrecht zum elektrischen Feld steht. Während also durch den Hertz'schen Dipol eine Schwingung im elektrischen Feld verursacht wird, wird auch gleichzeitig eine analoge Schwingung im magnetischen Feld erzeugt. Diese Schwingung im magnetischen Feld pflanzt sich nun auf die selbe Weise im Raum fort, wie es die Elektrische tut, sodass eine magnetische Welle entsteht.

Das bedeutet, dass jede elektrische Welle von einer magnetischen Welle begleitet wird, die die selbe Phase hat, aber senkrecht zu ihr schwingt. Aufgrund der Tatsache, dass diese Wellen nur paarweise auftreten können (aufgrund der Induktionsgesetze) wird von **elektromagnetischen Wellen** (EM Wellen) gesprochen.

Wie in Abbildung 4.3 gut zu erkennen ist, breiten sich EM Wellen parallel zu dem Hertz'schen Dipol aus und nicht entlang der Dipolachse.

### **Empfangen elektromagnetischer Wellen**

Um EM Wellen "empfangen" zu können bedarf es nichts weiter als einem weiteren Hertz'schen Dipol, der aber nicht von außen zur Schwingung angeregt wird. Dieser kann wieder ein Metallstab sein, dessen Mitte mit einer kleinen Lampe unterbrochen ist. Soll also Ladung von einem Ende des Stabes zum Anderen fließen, so muss der Strom durch die Lampe fließen und sie so zum leuchten bringen.

Wird dieser parallel zum Sender ausgerichtet, so ist zu beobachten, dass die Lampe leuchtet (solange er sich nicht auf der Sender-Längsachse befindet). Je näher der Empfänger an den Sender angenähert wird, desto stärker leuchtet die Lampe und auch bei Verdrehung des Empfängers, sodass er sich letztendlich senkrecht zum Sender steht, ist zu beobachten, dass die Lampe immer schwächer leuchtet und schließlich erlischt.

Das Leuchten der Lampe lässt sich einfach damit erklären, dass durch das elektrische Feld der EM Welle eine Kraft auf die Ladungsträger im Metallstab ausgeübt wird, sodass diese anfangen entlang der Feldlinien zu fließen. Der so erzeugte elektrische Strom bringt dann die Lampe zum Leuchten. Da das elektrische Feld, das durch die EM Welle übertragen wird oszilliert, entsteht in dem Metallstab ein Wechselstrom.

Ist der Empfänger senkrecht zum Sender, so bildet sich der Wechselstrom durch den Querschnitt (also bei einem aufrecht stehenden Stab von links nach rechts statt von oben nach unten) des Empfängers, sodass längs des Empfängers kein

Strom fließt, der die Lampe zum leuchten bringen könnte.

Die Tatsache, dass es wichtig ist, welche Ausrichtung der Empfänger relativ zum Sender hat, zeigt dass die abgestrahlte Welle gerichtet, also polarisiert, ist. In diesem Fall ist die Welle sogar **linear polarisiert**.

#### 4.4.2 Mathematische Beschreibung

Für die mathematische Beschreibung des von einem Hertz'schen Dipol abgestrahlten EM Welle, wird die Abstrahlung in einzelne Schritte zerlegt:

- $t = 0$ : Der Dipol ist maximal geladen, es fließt kein Strom und somit gibt es auch kein abgestrahltes Magnetfeld. Das elektrische Feld ist in diesem Zustand maximal. Das elektrische Feld eines Dipols ist gegeben durch Gleichung (2.21). Ist der Abstand zum Dipol noch sehr gering ( $r < \frac{\lambda}{2}$ ), so wird vom sogenannten **Nahfeld** gesprochen. Da der Abstand  $r$  in diesem Bereich sehr klein ist, kann Gleichung (2.21) angenähert werden mit

$$E_{nah} \approx -\frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

- $t = \frac{T}{4}$ : Der Dipol ist momentan ungeladen, der fließende Strom und somit auch das erzeugte Magnetfeld ist maximal. Das elektrische Feld ist gleich Null.

Es stellt sich heraus, dass das magnetische Nahfeld proportional zur zeitlichen Änderung des Dipolmoments ist. Das macht auch Sinn, denn ein Magnetfeld ist proportional zur Stromstärke und um das Dipolmoment zu ändern, muss ein Strom zum Ladungsausgleich fließen, der dann ja das Magnetfeld erzeugt. Es gilt also

$$B_{nah} \propto \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt}$$

- Für  $t = \frac{T}{2}$  und  $t = \frac{3T}{4}$  gelten wieder die obigen Zusammenhänge, nur mit umgekehrten Vorzeichen, da sich hier inzwischen die Polarität des Dipols umgekehrt hat.

Insgesamt zeigt sich also, dass in der Näherung des Nahfelds das elektrische und magnetische Feld um  $\frac{\pi}{2}$  phasenverschoben sind.

#### 4 Wellen

Wird allerdings das **Fernfeld** betrachtet ( $r \gg \lambda$ ), so können andere Näherungen verwendet werden, bei denen schlussendlich heraus kommt, dass das elektrische und magnetische Feld in Phase sind. Für die beiden Felder gilt

$$E, B \propto \frac{1}{r} \cdot \frac{d^2 \vec{p}}{dt^2}$$

Das zeigt, dass eine EM Welle nur durch beschleunigte Ladungsträger entsteht.

Letztendlich sind beides nur Näherungen und der Bereich zwischen Nah- und Fernfeld ist sehr viel schwieriger zu berechnen. [22]

#### Energiestromdichte - Poyntingvektor

Da es sich bei EM Wellen um Transversalwellen handelt, muss die Ausbreitungsrichtung senkrecht zum elektrischen und magnetischen Feld sein. Für die Ausbreitungsrichtung  $\vec{S}$  gilt also

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (4.14)$$

Der Vektor  $\vec{S}$  wird auch als **Poyntingvektor** bezeichnet.

Da die beiden Felder senkrecht aufeinander stehen, gilt

$$S = E \cdot H$$

Womit die Einheit des Poyntingvektors die folgende ist

$$[S] = [E] \cdot [H] = \frac{\text{V}}{\text{m}} \cdot \frac{\text{A}}{\text{m}} = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Somit gibt der Poyntingvektor gleichzeitig zur Ausbreitungsrichtung auch die **Energiestromdichte** einer EM Welle an.

### Wellengleichung von EM Wellen

Die Wellengleichung einer EM Welle leitet sich direkt aus der allgemeinen Form der Wellengleichung (siehe Gleichung (4.3)) ab. Sie ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2} &= \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \cdot \nabla^2 \vec{E} \\ \text{bzw. } \frac{d^2 \vec{H}}{dt^2} &= \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \cdot \nabla^2 \vec{H} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Das bedeutet, dass die Phasengeschwindigkeit einer EM Welle gegeben ist durch

$$v_{Ph} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = c_0 \quad (4.16)$$

also gleich der Vakuumlichtgeschwindigkeit  $c_0$  ist.

#### 4.4.3 Wechselwirkung von EM Wellen mit Materie

Trifft eine EM Welle auf einen Materie, so sorgt das elektrische Feld der EM Welle dafür, dass auf die Ladungsträger innerhalb der Materie eine Kraft ausgeübt wird.

##### Leiter

Da die Ladungsträger innerhalb eines Leiters frei verschiebbar sind, werden sie durch die wirkende Kraft verschoben. Es entsteht also ein elektrischer Strom.

Durch diesen elektrischen Strom entsteht in dem Leiter seinerseits ein Potential, welches ein elektrisches Feld mit umgekehrter Polarität zu dem der EM Welle besitzt. Gleichzeitig entsteht durch den Strom natürlich auch wieder ein magnetisches Feld, welches die selbe Polarität, wie das der EM Welle besitzt.

Da die EM Welle aus einem schwingenden elektrischen Feld besteht, wird auch in dem Leiter ein Wechselstrom erzeugt, der somit seinerseits als Hertz'scher Dipol fungiert und eine EM Welle ausstrahlt. Gewissermaßen wird eine EM Welle also an einem Leiter reflektiert.

#### 4 Wellen

Wird einmal angenommen, dass die eintreffende EM Welle aus dem elektrischen Feld  $\vec{E}_e = E_0 \cos(\omega t - |\vec{k}_e|z) \cdot \hat{e}_x$  und dem Magnetfeld  $\vec{H} = H_0 \cos(\omega t - |\vec{k}_e|z) \cdot \hat{e}_y$  besteht (Ausbreitung in  $z$ -Richtung), so wird in dem Leiter ein Strom der Form

$$\vec{I} = I_0 \cos(\omega t) \cdot \hat{e}_x$$

erzeugt. Dieser Strom erzeugt ein magnetisches Wirbelfeld in der  $zy$ -Ebene, dessen  $y$ -Komponente  $\vec{H}_r$  beschrieben werden kann durch

$$\vec{H}_r = H_0 \cos(\omega t - |\vec{k}_r|z) \cdot \hat{e}_y$$

Da die Rücklaufende EM Welle genau die entgegengesetzte Ausbreitungsrichtung hat, gilt  $|\vec{k}_e| = -|\vec{k}_r| = k$  gilt für das rücklaufende Magnetfeld (Hier wird nur die Ausbreitung in  $z$ -Richtung betrachtet)

$$\vec{H}_r = H_0 \cos(\omega t + kz) \cdot \hat{e}_y$$

Der Zusammenhang zwischen dem elektrischen und magnetischen Feld ist in Gleichung (2.58) gegeben (Umrechnung zwischen  $\vec{H}$  und  $\vec{B}$  siehe Gleichung (2.55)), sodass folgende Gleichung gelten muss (Es wurde auf beiden Seiten der Gleichung zwei Mal nach dem Ort differenziert, sodass auf der einen Seite eine örtliche Ableitung bestehen bleibt und auf der Anderen die Integration über eine Fläche weg fällt):

$$\frac{d\vec{E}_r}{dz} = -\mu_0 \frac{d\vec{H}_r}{dt}$$

Da ein Ausdruck für  $\vec{H}_r$  bekannt ist, kann dieser eingesetzt werden, womit sich dann Folgendes ergibt

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{E}_r}{dz} &= \mu_0 H_0 \omega \cdot \sin(\omega t + kz) \cdot \hat{e}_y \\ \vec{E}_r &= -\mu_0 H_0 \frac{\omega}{k} \cdot \cos(\omega t + kz) \cdot \hat{e}_y \\ &= -E_0 \cos(\omega t + kz) \cdot \hat{e}_y \end{aligned}$$

Somit ist also gezeigt, dass die rücklaufende EM Welle im Prinzip die selbe, wie die einfallende EM Welle ist, nur dass sie eben die umgekehrte Ausbreitungsrichtung und umgekehrte Polarität des elektrischen Feldes aufweist.

Das führt dann also dazu, dass sich vor dem Leiter die Welle mit ihrer Reflexion überlagert, was dann zu einer stehenden Welle führt (siehe Kapitel 4.3.1).

Eine wichtige Tatsache ist noch die, dass sich die vom Leiter erzeugte EM Welle natürlich in alle Richtungen ausbreitet und somit auch auf der "Ausfallseite" (also gegenüber von der Seite, wo die eintreffende EM Welle auftrifft). Auf dieser Seite hat sie nun aber die selbe Ausbreitungsrichtung, wie die eintreffende EM Welle. Da die beiden Wellen in Phase sind, hier auch die selbe Ausbreitungsrichtung aber umgekehrte Polarität des elektrischen Feldes, kommt es zu destruktiver Interferenz der beiden Wellen, sodass sie sich gegenseitig auslöschen. Somit wurde die eintreffende EM Welle am Leiter gestoppt (hinter dem Leiter ist effektiv keine EM Welle mehr messbar).

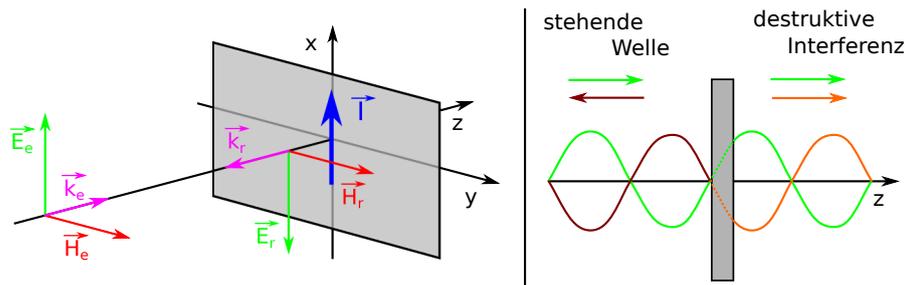


Abbildung 4.4: Reflexion einer EM Welle an einem Leiter. Links: Konzeptionelle Skizze zum Verständnis der durchgeführten Rechnung. Rechts: Schematische Darstellung der Auswirkung der Interaktion zwischen einfallender EM Welle (grün) und der dadurch entstehenden EM Welle (dunkelrot, bzw. orange) (Diese Skizze zeigt der Übersichtlichkeit halber nur das elektrische Feld).

Dieser Effekt kann nun genutzt werden, um EM Wellen zu polarisieren. Trifft eine EM Wellengruppe deren elektrisches Feld beliebig um die Ausbreitungsachse gedreht sind, auf einen Eisenkamm (also einen Kamm aus einem Leiter), so erzeugt jedes elektrische Feld, welches auch nur leicht schräg zu den Kammzähnen steht einen Strom in den Kammzähnen, der dafür sorgt, dass die entsprechende EM Welle hinter dem Kamm ausgelöscht wird. Somit kann also nur die EM Welle passieren, deren elektrisches Feld parallel zu den Kammzähnen schwingt. So, it wurde die EM Wellengruppe auf nur eine Schwingungsrichtung polarisiert.

## Isolatoren

In Isolatoren können die Ladungsträger nicht bewegt werden, sodass kein elektrischer Strom entstehen kann, der eine EM Welle erzeugen könnte. Somit kann eine

## 4 Wellen

EM Welle einen Isolator ohne Probleme passieren.

Der einzige Effekt der auftritt, ist der, dass innerhalb des Isolators eine andere Dielektrizitätszahl  $\varepsilon$  und eine andere Permeabilität  $\mu$  herrscht. Dies beeinflusst wie schnell sich die EM Welle innerhalb des Isolators ausbreiten kann.

Somit ist die Phasengeschwindigkeit der EM Welle nicht mehr die im Vakuum (siehe Gleichung (4.16)), sondern

$$c_m = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_r \mu_0}} = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} = \frac{c_0}{n} \quad (4.17)$$

$n$  wird dabei als **Brechungsindex** bezeichnet. Da die Frequenz und die Wellenlänge miteinander über die Ausbreitungsgeschwindigkeit verknüpft sind (siehe Gleichung (4.10)), bedeutet, dies dass sich eine der beiden Größen bei Änderung der Ausbreitungsgeschwindigkeit ebenfalls ändern muss. In diesem Fall ist das die Wellenlänge. Es gilt

$$\lambda_m = \frac{\lambda_0}{n}$$

Da ein realer Isolator aber niemals ein perfekter Isolator ist und somit stets ein klein wenig leitend ist, wird die Welle bei Passieren eines realen Isolators abgeschwächt. Ihre Intensität nimmt ab. Dabei wird dann von der sogenannten **Absorption** gesprochen.

## 4.5 Lichtwellen

Lichtwellen sind nichts Weiteres als EM Wellen. Somit gelten für sie die selben Gesetzmäßigkeiten, die im vorherigen Kapitel besprochen wurden.

Das was Lichtwellen ausmacht, ist dass es EM Wellen mit einer bestimmten Wellenlänge (innerhalb des sichtbaren Spektrums  $400\text{nm} < \lambda < 700\text{nm}$ ) sind. Das macht sie besonders attraktiv, um Experimente mit ihnen zu machen, da sie eben einfach mit dem Auge erkannt werden können und keine speziellen Messgeräte benötigt werden.

### 4.5.1 Huygens-Fresnel'sches Prinzip

Das **Huygens-Fresnel'sches Prinzip** ist ein Modell, welches zur Erklärung der Beugungs- und Brechungsverhaltens von (Licht)wellen verwendet werden kann.

Es besagt, dass jeder Punkt auf einer Wellenfront wieder als eine Quelle einer sogenannten Elementarwelle, die sich kugelförmig von diesem Punkt ausbreitet, angesehen werden kann. Die tatsächliche Welle (deren Wellenfront betrachtet wurde) ergibt sich dann als Superposition aller Elementarwellen.

Die Elementarwellen besitzen dabei die selbe Wellenlänge und Phasengeschwindigkeit wie die Primärwelle (Ausgangswelle).

Die "neue" Wellenfront der Primärwelle (also die Wellenfront zu einem späteren Zeitpunkt) ist dabei durch die Einhüllende aller Elementarwellen gegeben.

### 4.5.2 Reflexion und Brechung von Licht an Grenzflächen

Trifft Licht auf eine Grenzfläche (die Grenze zweier Materialien), so wird es teilweise wieder reflektiert und teilweise gebrochen.

Um das Phänomen der **Reflexion** beschreiben zu können wird das Huygens-Fresnel'sche Prinzip verwendet. Angewendet wird es auf eine Welle, deren Wellenfronten (Maxima) stets den gleichen Abstand zueinander haben und unter einem Winkel  $\alpha$  auf die Grenzfläche treffen.

## 4 Wellen

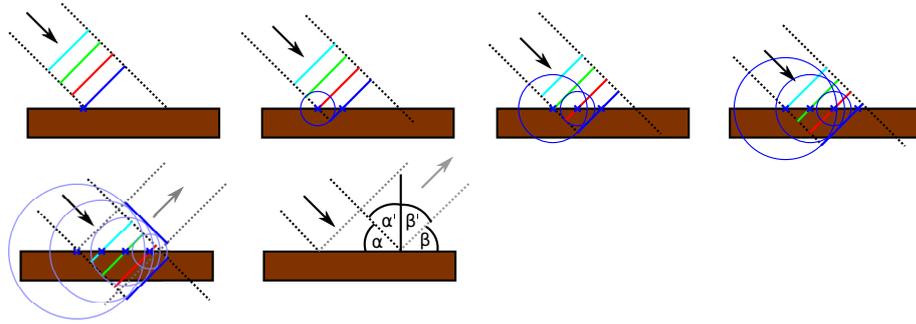


Abbildung 4.5: Konstruktion einer Reflexion mittels des Huygens-Fresnel'schen Prinzips. Hier wurde beispielhaft die Reflexion der blauen Wellenfront konstruiert. Die reflektierte Wellenfront ergibt sich aus der Superposition der Elementarwellen (Kreise) die jeweils an der Grenzfläche angefangen werden, sobald die blaue Wellenfront diese berührt. Bei diesen Skizzen wurde die Brechung der Wellen nicht beachtet.

Es zeigt sich also, dass der Einfallswinkel  $\alpha$ , bzw.  $\alpha'$  der Welle zur Grenzfläche genau gleich dem Ausfallswinkel  $\beta$  bzw.  $\beta'$  ist. Es gilt also stets

$$\alpha = \beta \quad \text{bzw.} \quad \alpha' = \beta' \quad (4.18)$$

Zur Herleitung der Brechung von Wellen an Grenzflächen kann ebenfalls das Huygens-Fresnel'sche Prinzip angewendet werden, wenn man die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Elementarwellen gleich der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle im neuen Medium setzt und dann die neue Wellenfront betrachtet, die innerhalb des neuen Mediums entsteht.

Etwas anschaulicher wird das Ganze jedoch, wenn einfach davon ausgegangen wird, dass eine Welle an einer Oberfläche gebrochen wird und anhand dessen das Brechungsgesetz hergeleitet wird (Das entspricht dem Schritt der nach der Konstruktion der neuen Wellenfront anhand der Elementarwellen folgen muss).

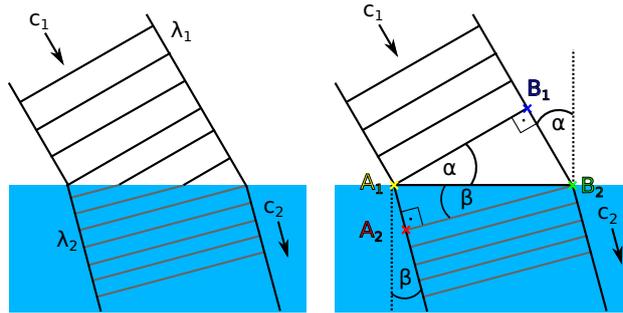


Abbildung 4.6: Schematische Darstellung der Brechung einer einzelnen Wellenfront. Bei den eingezeichneten Strichen handelt es sich stets um ein und die selbe Wellenfront, nur zu unterschiedlichen Zeitpunkten.

Wie in Abbildung 4.6 zu erkennen ist, lässt sich die Brechung von Wellen mathematisch auf zwei rechteckige Dreiecke, einen Einfallswinkel  $\alpha$  und einen Ausfallwinkel  $\beta$  zurückführen. Es gilt ganz allgemein

$$\sin(\alpha) = \frac{|\overrightarrow{B_1 B_2}|}{|\overrightarrow{A_1 B_2}|} \quad \text{und} \quad \sin(\beta) = \frac{|\overrightarrow{A_1 A_2}|}{|\overrightarrow{A_1 B_2}|}$$

Daraus lässt sich folgende Beziehung ableiten:

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{|\overrightarrow{B_1 B_2}|}{|\overrightarrow{A_1 A_2}|}$$

Da die Zeit zwischen  $A_1$  und  $A_2$  und  $B_1$  und  $B_2$  genau gleich lang ist ( $\Delta t$ ) können diese Strecken auch über die entsprechende Zeit und die jeweilige Ausbreitungsgeschwindigkeit im Medium beschreiben werden. Dann gilt

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{c_1 \cdot \Delta t}{c_2 \cdot \Delta t} = \frac{c_1}{c_2}$$

An dieser Stelle wird der **Brechungsindex**  $n$  eingeführt, der das Verhältnis der Vakuum-Lichtgeschwindigkeit  $c_0$  zu der Ausbreitungsgeschwindigkeit im Medium  $c_m$  beschreibt.

$$n = \frac{c_0}{c_m} \quad (4.19)$$

## 4 Wellen

Somit ist das Brechungsgesetz gegeben durch

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{n_2}{n_1} = \text{const.} \quad (4.20)$$

Im Allgemeinen findet an einer Grenzfläche stets ein wenig Reflexion statt, aber der Großteil der Strahlung geht in das zweite Medium über und wird so gebrochen.

Bei EM Wellen gibt es jedoch das Phänomen der **Totalreflexion**, bei dem nahezu die komplette Welle reflektiert wird. Sie tritt auf, wenn der Einfallswinkel größer als der Grenzwinkel  $\alpha_T$  ist.

$$\sin(\alpha_T) = \frac{n_2}{n_1} \quad (4.21)$$

### 4.5.3 Dispersion

**Dispersion** beschreibt den Effekt, dass Wellen unterschiedlicher Wellenlänge an einer Grenzfläche unterschiedlich stark gebrochen werden und somit durch die Brechung aus z.B. einem Lichtbündel weißen Lichtes einzelne Lichtstrahlen mit den entsprechenden Farben (Wellenlängen) aufgespalten wird (Lichtaufspaltung am Prisma).

Dies hat damit zu tun, dass der Brechungsindex abhängig von der Wellenlänge, bzw. der Frequenz der Welle ist, da er abhängig von der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle im Medium  $c_m$  ist, die ihrerseits gemäß Gleichung (4.10) abhängig von der Frequenz ist.

$$c_m = \lambda \cdot \nu = \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \frac{\nu}{2\pi} = \frac{\frac{\nu}{2\pi}}{\frac{\lambda}{2\pi}} = \frac{\omega}{|\vec{k}|}$$

Anders formuliert bedeutet das, dass Dispersion immer dann auftritt, wenn die Phasengeschwindigkeit einer Welle aus einer Wellengruppe ungleich der Gruppengeschwindigkeit ist (Für nähere Informationen gibt es ein ausgezeichnetes YouTube-Video [23]).

### 4.5.4 Rayleigh-Streuung

Trifft eine EM Welle auf ein Atom oder Molekül, das deutlich kleiner, als die Wellenlänge der Welle ist, so kommt es zur sogenannten **Rayleigh-Streuung**. Dabei wird die Welle elastisch gestreut.

Dies ist zurückzuführen auf die Tatsache, dass durch die EM Welle die Ladungsträger im Atom oder Molekül in Schwingung versetzt werden, sodass von dem entsprechenden Teilchen eine Kugelwelle angeregt wird. Von außen betrachtet sieht es also so aus, als würde die einfallende EM Welle an dem Teilchen in all Richtungen gestreut werden.

Dabei wird natürlich die Intensität  $I$  der Welle in die ursprüngliche Ausbreitungsrichtung  $z$  abgeschwächt. Es gilt allgemein

$$\begin{aligned}\frac{dI}{I} &= K_S dz \\ I(z) &= I_0 e^{K_S z}\end{aligned}\tag{4.22}$$

$K_S$  ist dabei eine materialspezifische Streuungskonstante.

Diese Streuung ist beispielsweise dafür verantwortlich, dass es ein Abend-, bzw. Morgenrot gibt.

### 4.5.5 Beugung

»Die **Beugung** oder Diffraktion ist die Ablenkung von Wellen an einem Hindernis. Durch Beugung kann sich eine Welle in Raumbereiche ausbreiten, die auf geradem Weg durch das Hindernis versperrt wären.«[24]

Anders formuliert bedeutet dies, dass Beugung eine Ablenkung von Licht ohne Reflexion und Brechung ist. Sie kann auch wieder sehr schön durch das Huygens-Fresnel'sche Prinzip erklärt werden.

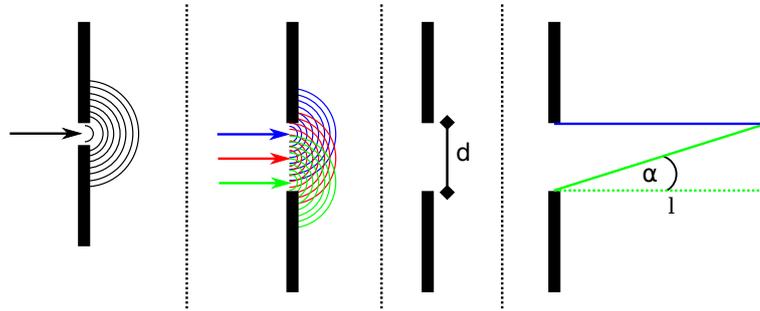
**Beugung am Einzelspalt**

Abbildung 4.7: Schematische Vorgänge bei der Beugung an einem Einzelspalt.

Passiert die Welle den Spalt, so kann jeder Punkt ihrer Wellenfront wieder als Emitter einer Elementarwelle gesehen werden, die sich kugelförmig ausbreitet. Ist die Spaltbreite dabei klein ( $d \approx \lambda$ ), so entsteht in erster Näherung nur eine einzige Kugelwelle, sodass ein hinter dem Spalt stehender Schirm gleichmäßig beleuchtet wird.

Ist der Spalt aber breiter ( $d \gg \lambda$ ), so entstehen mehrere Elementarwellen, die sich hinter dem Spalt gegenseitig überlagern und somit auf einem entsprechenden Auffangschirm hinter dem Spalt ein Interferenzmuster (Streifen) erzeugen.

Diese Interferenz kommt dadurch zustande, dass "Lichtstrahlen" einen anderen Weg zurücklegen müssen, um zu einem bestimmten Punkt auf dem Auffangschirm zu kommen, abhängig davon, ob sie z.B. am oberen oder unteren Ende des Spalts ihren Ursprung nehmen.

Für das gezeigte Beispiel in Abbildung 4.7 (ganz rechts) gilt beispielsweise für den Weg  $s$  des grünen Strahls

$$s = l \sin(\alpha)$$

Es ist nun also abhängig von dem entsprechenden Winkel  $\alpha$  wie weit der Strahl wandern muss, um auf den betrachteten Punkt zu treffen. Da die Welle, die diesem Strahl folgt aber weiter schwingt, bedeutet das, dass jeder Weg der weiter zurück gelegt werden muss eine Änderung der Phase am Auftreffpunkt, im Vergleich zu dem Strahl, der auf direktem Weg wandern kann, hervorruft.

Da sich die Welle am betrachteten Punkt durch die Interferenz aller Elementarwellen ergibt, kommt es durch die Phasenverschiebung zu einer konstruktiven oder

destruktiven Interferenz. Die Extremfälle dieser Interferenz sind die Folgenden:

$$\begin{aligned} \text{konstruktiv: } s &= l \sin(\alpha) = n\lambda \\ \text{destruktiv: } s &= l \sin(\alpha) = \frac{(2n+1)\lambda}{2} \end{aligned}$$

Dabei ist  $n$  eine beliebige natürliche Zahl.

Die relative Intensitätsverteilung auf dem Auffangschirm ergibt sich dabei zu

$$\begin{aligned} I_{rel}(\alpha) &= \frac{I(\alpha)}{I(0)} = \left( \frac{\sin(\xi)}{\xi} \right)^2 \\ \xi &= \frac{\pi d}{\lambda} \sin(\alpha) \end{aligned} \quad (4.23)$$

### Beugung am Doppelspalt und Gitter

Ein Doppelspalt besteht nun aus zwei Einzelspalten mit der Spaltbreite  $d$ , die zueinander den Abstand  $D$  aufweisen. Ein Gitter ist eine Anordnung, bei der beliebig viele Einzelspalte mit dem Abstand  $D$  zueinander angeordnet sind.

Das resultierende Interferenzmuster auf dem Auffangschirm entsteht nun durch die Superposition der einzelnen Einzelspaltmuster.

Gilt  $d \ll D$ , so ergibt sich das Interferenzbild des Doppelspalts zu

$$I_{rel}(\alpha) = \frac{I(\alpha)}{I(0)} = \cos^2 \left( \frac{\pi d}{\lambda} \sin(\alpha) \right) \quad (4.24)$$

Andernfalls gilt

$$\begin{aligned} I_{rel}(\alpha) &= \frac{I(\alpha)}{I(0)} = \left( \frac{\sin(\xi)}{\xi} \cdot \cos \left( \frac{\Phi}{2} \right) \right)^2 \\ \xi &= \frac{\pi d}{\lambda} \sin(\alpha) \quad \text{und} \quad \Phi = \frac{2\pi D}{\lambda} \sin(\alpha) \end{aligned} \quad (4.25)$$

Für ein Gitter bestehend aus  $p$  Einzelspalten ergibt sich eine Intensitätsverteilung von

$$\begin{aligned} I_{rel}(\alpha) &= \frac{I(\alpha)}{I(0)} = \left( \frac{\sin \left( \frac{p\Phi}{2} \right)}{p \sin \left( \frac{\Phi}{2} \right)} \right)^2 \\ \Phi &= \frac{2\pi D}{\lambda} \sin(\alpha) \end{aligned} \quad (4.26)$$

#### 4 Wellen

Die entstehenden Streifen auf dem Schirm sind dabei umso schärfer, je größer die Anzahl der Einzelspalte  $p$  ist.

# Literatur

- [1] 28. März 2017. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Kinematik>.
- [2] 30. März 2017. URL: [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/e9/Bewegung\\_gleichfoermig.png](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/e9/Bewegung_gleichfoermig.png).
- [3] 30. März 2017. URL: <http://www.gymbase.de/index/themeng11/ph/bilder/schieferwurf.png>.
- [4] 3. Apr. 2017. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Gravitation>.
- [5] 5. Apr. 2017. URL: [http://www.helpster.de/federkraft-einfach-erklaert\\_127795](http://www.helpster.de/federkraft-einfach-erklaert_127795).
- [6] 6. Apr. 2017. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Bewegungsgleichung>.
- [7] 10. Apr. 2017. URL: [https://de.wikipedia.org/wiki/Arbeit\\_\(Physik\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Arbeit_(Physik)).
- [8] 10. Apr. 2017. URL: <http://www.wikihow.com/Derive-the-Formula-for-Kinetic-Energy>.
- [9] 12. Apr. 2017. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Drehimpuls>.
- [10] 18. Apr. 2017. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Pr%C3%A4zession>.
- [11] 23. Apr. 2017. URL: [https://de.wikipedia.org/wiki/Feld\\_\(Physik\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Feld_(Physik)).
- [12] 23. Apr. 2017. URL: [https://de.wikipedia.org/wiki/Potential\\_\(Physik\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Potential_(Physik)).
- [13] 30. Mai 2017. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Dipol>.
- [14] 10. Juni 2017. URL: [https://de.wikipedia.org/wiki/Kondensator\\_\(Elektrotechnik\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Kondensator_(Elektrotechnik)).
- [15] 6. Aug. 2017. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Wechselstrom>.
- [16] 15. Aug. 2017. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=4gVgqGOGYOE>.
- [17] 21. Aug. 2017. URL: [https://de.wikipedia.org/wiki/Gekoppelte\\_Pendel#Fallunterscheidungen](https://de.wikipedia.org/wiki/Gekoppelte_Pendel#Fallunterscheidungen).
- [18] 22. Aug. 2017. URL: [https://www.youtube.com/watch?v=le\\_gMPJFyJ8](https://www.youtube.com/watch?v=le_gMPJFyJ8).
- [19] 24. Aug. 2017. URL: [https://de.wikipedia.org/wiki/Superposition\\_\(Physik\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Superposition_(Physik)).
- [20] 24. Aug. 2017. URL: [https://de.wikipedia.org/wiki/Formelsammlung\\_Trigonometrie#Sinusoid\\_und\\_Linearkombination\\_mit\\_gleicher\\_Phase](https://de.wikipedia.org/wiki/Formelsammlung_Trigonometrie#Sinusoid_und_Linearkombination_mit_gleicher_Phase).
- [21] 25. Aug. 2017. URL: [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/40/EM-Wave\\_noGIF.svg](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/40/EM-Wave_noGIF.svg).

## LITERATUR

- [22] 28. Aug. 2017. URL: <https://www.physicsforums.com/threads/phase-difference-between-magnetic-and-electric-field.887501/#post-5583194>.
- [23] 30. Aug. 2017. URL: [https://www.youtube.com/watch?v=uXbC1QG\\_-WU](https://www.youtube.com/watch?v=uXbC1QG_-WU).
- [24] 31. Aug. 2017. URL: [https://de.wikipedia.org/wiki/Beugung\\_%28Physik%29](https://de.wikipedia.org/wiki/Beugung_%28Physik%29).